SERIE DE INFORMES ESPECIALES Nº IM-74

CURSO DE DINAMICA DE POBLACIONES MARINAS

por:

Enrique Avila L.

Callao, Diciembre de 1970 DIRECCION TECNICA

CURSO DE DINAMICA DE POBLACIONES MARINAS

(Fe de Erratas)

Págira	Línes	Dice	Debe docir
3	1.5	haberme	habernos
4	5	No renovables Poblac En explotación Renovables cerrad Poblac abiert	En explotación Renovables 4
11	6	con ella	en ella
19	3	t _o	
	Cua ro	(u') ² 100	$\left[\frac{\left(\frac{\mathbf{u}'}{100}\right)^2}{100}\right]^2$
26	20	140,303;828,248	- 140,303'828,248
33	19	$\lim_{n \to \infty} q = \lim_{n \to \infty} e^{-\frac{n}{n}}$	$Limq = \lim_{n \to \infty} e^{-\frac{F!}{n}}$
43	19	+ R ₇ e ^{-(F+M) ø}	$+ \mathcal{B}_{1}' e^{-(\mathbf{F}+\mathbf{M})\rho'}$
43	20	$\begin{array}{ccc} & \mathbf{R}_1 & \mathbf{e}^{-(\mathbb{F}+\mathbf{M})} \circ \\ & + & \mathbf{R}_1 & \mathbf{e}^{-(\mathbb{F}+\mathbf{M})} \end{array}$	$+ R_{1}' e^{-(F+M)\rho'/} + R_{1}' e^{-(F+M)}$
49	3	$t - t_p 1$	t, - t,

régi na	Line	Bice Dice	Debe decir
54	Cua- dro	Las t que aparecen en C, J, K, L	y Ñ san t
30	7	experimental X. Y.	onencial
68	19	experimental $X_i \sum Y_i$ $\sum X_i Y_i - n \qquad (X - X)$	$Y + \sum_{i} X_{i} Y_{i} - \sum_{i} X_{i} \sum_{i} Y_{i}$
		$\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$	$\frac{\sum x_i^2 - \frac{(x-x^i)_5}{u}}{\sum x_i^2 - \frac{x}{\sum x^i} \sum x^i} (x-x)$
		— n	
68	4	Y = 7.2552 - Y = 7.2552	7.2552 - 6.189378
77	19	$Y = 7.2552 = g L^3 \left(1 - e^{-k(t - t_0)}\right)^3$	$\mathbf{g} \mathbf{L}^3 \left(\mathbf{t} - \mathbf{k}(\mathbf{t} - \mathbf{t}_0)\right)^3$
80	14	$ \frac{3}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nkt_{o} - nkt_{p}}{F + M + nk}} $	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
83	6	En la fórmula que define C falta	el factor 1 - e-(F+M+nk)
83	26		luego se mantiene más o menos cons-
			tante a partir de
85	6	experimental	onencial
96	3	t = 15 años t _n	= 15 años
98	3	$\frac{3}{\sum_{n=0}^{\infty} F + M + nk} = \frac{3}{n}$	$\frac{\int n^{e^{-nk(t_{p'}-t_0)}}}{F+M+nk}$
. 1 -		$\frac{1}{n=0} F + M + nk$	F + M + nk
•			

Página	Lírea	Dice	Debe decir
100		$\frac{1_{t}}{L_{-2}} = -1 = -e^{-k(t - t_{0})}$	$\frac{1}{L_{eo}} - 1 = -e^{-k(t - t_0)}$
100	18	$\mathbf{c} = \frac{1}{2}$	$c = \frac{1}{c}$
106	. 7	$W_{\infty} \left[1 - \frac{\left(W_{\text{pi}}\right)^{1/3}}{W} \right]^{M/k}$	$W_{\mathbf{p}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{W}_{\mathbf{p}}}{\mathbf{W}} \right)^{1/3} $
106	£	$= Y' \frac{W_{\infty}}{\left[1 - \frac{W_{\mathbf{p'}}}{W}\right]^{1/3}}$	$= Y' \frac{\mathbb{W}_{\infty}}{\left[1 - \frac{\mathbb{W}_{\mathbf{p}}}{\mathbb{W}_{\infty}}, \frac{1/3}{3}\right]^{\mathbb{M}/\mathbf{k}}}$
107	Fig.		H
111	2	+ R ₃ e ^{-(p-3)M} + K ₁	$\dots + \mathbb{R}_3 e^{-(p-3)M} + \dots + \mathbb{R}_p$
111	7	$e^{-(p-2)M} + (p-3)M + e^{-(p-p)M}$	$e^{-(p-2)M} + e^{-(p-3)M} + \dots + e^{-(p-p)M}$
111	14		$\phi = 1$
		$\phi = 0$	$\phi = 0$
112	\$	P ==	$P_{N} = 0$
113	15	demostrar la	demostrar que la
118	1.5	es igual a la saptura	es inversamente propercional a la captura

Página	Línea	Dice	Debe decir
115	Fig.		4000 3000 Fig. 18 2000 1000
118	2	lo tanto es decrecimiento	lo tanto el decrecimiento
123	38	Apercu	Aperçu

EAL/ppc

IMARPE, 20 de mayo de 1971

PROLOGO

En noviembre de 1970, el suscrito tuvo la oportunidad de dictar una serie de lecciones sobre Dinámica de Poblaciones Marinas, en el Instituto del Mar, a una parte de su personal y a profesionales de otras entidades.

Los apuntes de clase fueron tomados por la biólogo, Srta. Isabel Tsukayama, con una diligencia y habilidad que merecen nuestro reconocimiento. Estos apuntes fueron revisados por el autor para los fines de la presente publicación, de modo que él
asume completa responsabilidad sobre los errores que pudieran
haberse deslizado.

Aunque la bibliografía consultada ha sido extensa, la preparación de las lecciones ha requerido tan sólo de unos doce títulos. En el modelo no-analítico, como es el logístico de Verhulst-Pearl, las publicaciones de M. B. Schaefer fueron de la mayor utilidad y de entre éllas muy particularmente: "Some aspects of the dynamics of populations important to the management of the commercial fisheries" (1954), la cual, de hecho, sirvió para ilustrar numéricamente la metodología de este modelo de dinámica de población.

En el caso de los modelos analíticos, recurrimos especialmente a los trabajos de J. A. Gulland (1969), G. Saetersdal (1963), R. J. H. Beverton y S. J. Holt (1957) y especialmente las lecciones de R. J. H. Beverton: "Notes on the use of theoretical models in the study of the dynamics of exploited fish populations" (1954), de los que se han extraído varios ejemplos numéricos y gráficos.

Las tablas para el cómputo del rendimiento fueron objeto de dos lecciones y a este respecto resultó de gran ayuda la publicación "Tables of Yield Functions" de Beverton (1966).

En lo concerniente a los comentarios que fue indispensable hacer sobre la dinámica de la anchoveta peruana (Engraulis ringens J.) fueron de invalorable ayuda los trabajos de M. B. Schaefer (1957 y 1970), G. Saetersdal y J. Valdivia (1964), J. A. Gulland (1968) y L. K. Boerema y ótros (1965).

Finalmente, los aspectos generales de la ecología de la anchoveta pudieron ser expuestos ventajosamente gracias a la publicación de R. Jordán S. y A. Ch. de Vildoso: "La anchoveta (Engraulis ringens J.) conocimiento actual sobre su biología, ecología y pesquería" (1965).

Las lecciones son ofrecidas con el máximo detalle matemático, con la finalidad de que las derivaciones de las fórmulas sean comprendidas con mayor facilidad aún por quienes no tienen ape-go a las matemáticas.

Abrigamos la esperanza de poder continuar estas lecciones en el futuro inmediato, incorporando nuevos modelos de dinámica de población como el de Pella-Tomlinson (1969) y otros aspectos importantes como los relativos a la metodología censal y la teoría y modus operandi del muestreo estadístico en los estudios poblacionales.

Nos habremos de sentir muy complacidos si la presente publicación contribuye a promover el interés por el campo de la dinámica de las poblaciones ya que él está llamado a desempeñar un rol creciente en la explotación racional y científica de los recursos bióticos renovables del mundo entero.

Concluímos agradeciendo al Comandante Jaime Vásquez B., al Comandante Alfredo Freyre V. y al Dr. Jorge Sánchez R., Presidente del Directorio, Director General y Director Técnico respectivamente, del Instituto del Mar del Perú, por haberme otorgado el señalado privilegio de dictar estas lecciones en el seno de una institución que es, en nuestro país, ejemplo de trabajo metódico y de indiscutible austeridad científica.

CURSO DE DINAMICA DE POBLACIONES MARINAS

DE LOS RECURSOS

Los recursos se clasifican en:

Recursos Potenciales No renovables Población cerrada En explotación Renovables Población abierta

Recursos Potenciales .-

Son aquellos que no son objeto de explotación por parte del hombre. Estos recursos en el Perú son numerosos.

Recursos en Explotación .-

Son objeto de predación por parte del hombre.

No Renovables .-

No se autoperpetúan. Existe una disponibilidad fija del r \underline{e} curso que disminuye con la explotación hasta desaparecer.

Renovables .-

Son los recursos en explotación que tienen una tasa reproductiva, que se autorenuevan y autoperpetúan.

Población cerrada.-

Es aquella población en la cual se cumple la condición de que una vez que los reclutas entran a la fase explotable se que den en dicha fase por el resto de su vida, o sea que no emigran.

Población abierta.-

Es aquella en la que los reclutas que ingresan a la fase explotable permanecen temporalmente en élla y después emigran, o que por lo menos parte de éllos emigra.

Durante el desarrollo de este curso de Dinámica de Poblaciones Marinas nos referiremos a poblacionenes cerradas sólamente.

MODELOS MATEMATICOS EN DINAMICA DE POBLACIONES

Se clasifican en:

Modelos No analíticos Determinísticos
Matemáticos Analíticos Probabilísticos o
Estocásticos

No analíticos .-

Estos modelos no examinan separadamente los diferentes factores que controlan o gravitan sobre la dinámica de la población que se estudia.

Análiticos.-

Estudian separadamente los diversos factores que intervienen en la dinámica de la población de que se trata.

<u> Análiticos Determinísticos.-</u>

Son aquellos en que los factores que rigen la modalidad de la dinámica de población se consideran constantes, es decir, sus parámetros son constantes.

Analíticos Estocásticos .-

Los parámetros de la dinámica de población fluctúan en forma i \underline{m} previsible.

Modelos No Analíticos .-

Los pioneros de los modelos no analíticos son:

Fundamentos de los Modelos No Analíticos .-

En 1931, E. S. Russell formuló por primera vez un modelo matemá tico elemental. Schaefer al comentar a Russell enumera el siguien te axioma de Russell: "Cuando los incrementos son iguales a los decrementos, no hay cambio en el stock". Russell expresó este con cepto utilizando la ecuación:

$$S_2 = S_1 + (A + G) - (M + C)$$

donde:

 $S_2 = Magnitud$ en peso del stock al final del año

 S_1 = Magnitud en peso del mismo stock al comienzo del año

A = Reclutamiento

G = Crecimiento

M = Mortalidad natural

C = Mortalidad por pesca

Este stock estará en equilibrio cuando el stock al final de año sea igual al stock del principio del año, esto implica que:

$$A + G = M + C$$

Las imperfecciones de esta ecuación son señaladas por el mismo Russell:

- A, G, M, C son totales en peso y no en tasas, y siendo estos factores dependientes entre sí, la ecuación no determina, por ejemplo, en cuanto varía un factor al variar otro. Se necesitan modelos en que los factores sean independientes y que aparezcan en las ecuaciones como tasas, no como simples valores totales.
- Además la ecuación de Russell no considera la estructura del stock en cuanto se refiere a su composición por tallas y eda des.

Model Matemático de Pearl, Verhulst y Schaefer. -

La ley general de crecimiento de una población puede expresarse como sigue:

$$\frac{dP}{dt} = f (P) \dots (1)$$

donde f (P) es una función contínua, positiva y univaluada para valores entre P = 0 y P = L; La población máxima que puede sopor tar el espacio y las disponibilidades de alimento. Llamaremos a f (P) la tasa natural de incremento.

Una función particular que se ajusta bastante bien a los datos de crecimiento para organismos es la logística de Verhulst, Pearl:

$$\frac{dP}{dt} = K_1 P (L - P) \dots (2)$$

donde:

K = constante

P = población en cualquier nivel

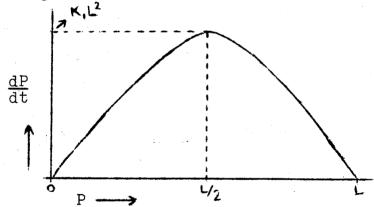
L = máximo valor de la población

En este caso f (P) es una parábola, pues en efecto:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{K_1 L}{dt} P - \frac{K_1}{cx^2} P^2$$

$$Y = a + bx + cx^2 \text{ (ecuación de la parábola)}$$

genera la siguiente curva:



Aplicando el teorema de máximos y mínimos se puede demostrar que $\frac{dP}{dt}$ es un máximo cuando $P=\frac{L}{2}$. En efecto si derivamos la ecuación

y la igualamos a cero, tendremos:

$$\frac{d\left(\frac{dP}{dt}\right)}{dP} = K_1 L - 2 K_1 P = 0 \dots (3)$$

¿Cuál es el valor de P que satisface la ecuación (3) ?

Evidentemente \underline{L} , pues en efecto:

$$K_1 \quad L = 2 \quad K_1 \quad \frac{L}{2} = 0 \quad \dots \quad (4)$$

De acuerdo al teorema de máximos y mínimos, L/2 puede corresponder a un máximo, un mínimo o un punto de inflexión, para esto extra<u>e</u> mos la 2da. derivada a la ecuación:

$$\frac{d^2\left(\frac{dP}{dt}\right)}{dP^2} = -2K_1$$

Al resultar esta segunda derivada negativa el valor $\frac{L}{2}$ corresponde a un máximo, es decir, el valor de P al que $\frac{dP}{dt}$ es un máximo es L/2. Dentro de este modelo se podría hablar de sobrepesca cuando el valor de P se encuentra situado a la izquierda de L/2.

Pesca de equilibrio es la cantidad de pesca que se puede extraer sin afectar el stock, es decir cuando la cantidad explotada es igual al incremento natural, o, en otras palàbras cuando la tasa de explotación es igual a $\frac{dP}{dt}$.

Se acaba de demostrar que cuando $P = \frac{L}{2}$, $\frac{dP}{dt}$ es un máximo, pero

¿Cuánto vale
$$\frac{dP}{dt}$$
 cuando $P = \frac{L}{2}$?

Veamos:

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dt}} = K_1 \, \, \frac{L}{2} \, \, \left(L - \underline{L} \right)$$

$$\frac{dP}{dt} = K_1 \frac{L}{2} \frac{(2L - L)}{2}$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{K_1}{L}$$
 que es la respuesta buscada

La integración de la ecuación (2) se puede hacer del siguiente modo:

$$\frac{dP}{dt} = K_1 P (L - P)$$

$$\frac{dP}{dt} = K_1 PL - K_1 P^2$$

$$\frac{dP}{dt} = P (K_1 L - K_1 P)$$

$$, K_1L = W$$

$$\frac{dP}{dt} = P (W - K_1 P)$$

invirtiendo la ecuación:

$$\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{dP}} = \frac{1}{\mathrm{P} \ (\mathrm{W-K_1\,P})}$$

$$dt = \frac{dP}{P (W-K, P)}$$

multiplicando ambos miembros por W:

$$Wdt = \frac{WdP}{P (W-K_1P)} \dots (5)$$

Aplicando el método de las fracciones parciales:

$$Wdt = \frac{WdP}{P(W-K_1P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{W-K_1P}$$
 (6)

$$\frac{\text{WdP}}{\text{P} (W-K_1 \text{P})} = \frac{\text{A} (W-K_1 \text{P}) + \text{BP}}{\text{P} (W-K_1 \text{P})}$$

$$WdP = A (W-K_1P) + BP$$

$$WdP = AW - AK_1P + BP$$

ordenando los términos:

$$WdP = BP - AK_1P + AW$$

 $WdP = P (B - AK_1) + AW$, como no hay P en el 1er miembro hacemos $(B - AK_1) = 0 \quad de \ donde:$

 $B = AK_1$, por otra parte:

WdP = AW

dP = A

Conociendo el valor de A reemplazamos en $B = AK_1$

$$B = dP K_1$$

Volviendo a la ecuación (6) y reemplazando con ella los valores hallados para A y B:

$$\frac{\text{WdP}}{\text{P (W-K_1P)}} = \frac{\text{dP}}{\text{P}} = \frac{\text{K,dP}}{\text{W-K_1P}}$$

o lo que es lo mismo, según (6):

$$Wdt = \frac{dP}{P} + \frac{K_1}{W - K_1} \frac{dP}{P}$$

Integrando

$$W \int dt = \int \frac{dP}{P} + \int \frac{K_1 dP}{W - K_1 P}$$

$$Wt = ln P - \frac{K_1}{K_1} ln (W - K_1 P) + C$$

$$Wt - C = 1n \frac{P}{W - K_1 P}$$

Wt - C =
$$\frac{P}{W - K_1 P}$$
, desdoblando

$$e^{Wt}$$
 e^{-C} $=$ $\frac{P}{W - K_1 P}$

haciendo e $^{-C}$ _ C^{t}

$$e^{Wt} = \frac{P}{W - K_1 P} \dots (7)$$

despejando P:

$$P = C' e^{Wt} (W - K_1 P)$$

$$P = C' e^{wt} W - C' e^{wt} K_1 P$$

 $P + C' e^{wt} K_1 P = C' e^{wt} W$

$$P (1 + C' e^{wt} K_1) = C' e^{wt} W$$

$$P = \frac{C' e^{Wt} W}{1 + C' e^{Wt} K_1} \dots (8)$$

Si P_o es el valor de la población al comienzo del período t: P_o cuando t=o

Volviendo a la ecuación (7) y reemplazando P por Po y t por o

$$C' = \frac{P}{W - K_1 P_0}$$

Conociendo C' reemplazomos en (8)

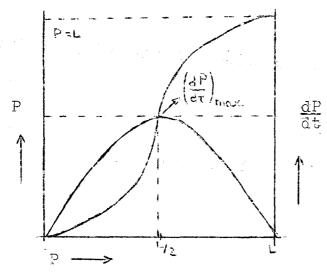
$$P = \frac{\frac{P_{o}}{W - K_{1} P_{o}} e^{Wt}}{1 + P_{o}} e^{Wt} = \frac{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}{\frac{W - K_{1} P_{o}}{W - K_{1} P_{o}}} = \frac{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}{\frac{W - K_{1} P_{o}}{W - K_{1} P_{o}}} = \frac{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}{\frac{W - K_{1} P_{o}}{W - K_{1} P_{o}}} = \frac{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}{\frac{W - K_{1} P_{o}}{W - K_{1} P_{o}}} = \frac{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}{\frac{W - K_{1} P_{o}}{W - K_{1} P_{o}}} = \frac{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}{\frac{W - K_{1} P_{o}}{W - K_{1} P_{o}}} = \frac{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}{\frac{W - K_{1} P_{o}}{W - K_{1} P_{o}}} = \frac{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}{\frac{W - K_{1} P_{o}}{W - K_{1} P_{o}}} = \frac{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}{\frac{W - K_{1} P_{o}}{W - K_{1} P_{o}}} = \frac{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}{\frac{W - K_{1} P_{o}}{W - K_{1} P_{o}}} = \frac{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}{\frac{W - K_{1} P_{o}}{W - K_{1} P_{o}}} = \frac{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}{\frac{W - K_{1} P_{o}}{W - K_{1} P_{o}}} = \frac{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}{\frac{W - K_{1} P_{o}}{W - K_{1} P_{o}}} = \frac{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}{\frac{W - K_{1} P_{o}}{W - K_{1} P_{o}}} = \frac{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}} = \frac{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}} = \frac{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}} = \frac{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}{\frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}} = \frac{P_{o} e^{Wt}}{W - K_{1} P_{o}}}$$

$$P = \frac{P_0 w^t}{W^{-K_1}P_0^{+P_0} e^{-K_1}}$$

pero W == K₁ L, luego

$$P = \frac{L P_{o} e^{K_{1}Lt}}{L - P_{o} + P_{o} e^{K_{1}Lt}} = \frac{L P_{o} e^{K_{1}Lt}}{L + P_{o} (e^{K_{1}Lt} - 1)} \dots (9)$$

Esta integral da el valor de P (la población en números) en función del tiempo. La curva resultante es una curva sigmoidea con una asínto ta superior en P = L y un punto de inflexión en el valor de P para el cual $\frac{dP}{dt}$ es un máximo, o sea P = L/2.



En la realidad $\frac{dP}{dt}$ se encuentra algo desplazado hacia la iz quierda, por lo tanto la población que corresponde a este valor máximo de $\frac{dP}{dt}$ será menor que $\frac{L}{2}$.

Observando el comportamiento matemático de estas curvas logisticas, Schaefer (1954) dice: "A medida que la pesquería aumenta en intensidad, el stock P disminuye. Este decremento en la población es una consecuencia necesaria del aumento en el esfuerzo pesquero, y, por consiguiente, constituye un resultado inevitable del desarrollo de la pesquería". Y luego añade: "El stock y la correspondiente pesca de equilibrio pueden ser mantenidos en un valor constanta, mediante la regulación del esfuerzo pesquero, a cualquier valor de P menor que la".

Efectos de la pesca. - Incorporando el efecto de la pesca en la ecuación original:

Esta tasa de pesca es función del esfuerzo pesquero y será además, proporcional a la población. Entonces:

Cuando:	el stock:
P ø F <f (p)<="" td=""><td>aumenta</td></f>	aumenta
P ø F>f (P)	disminuye
$P \not o F = f (P)$	no cambia
$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{dt}} = 0$	Pesca de equilibrio
$\left[\frac{dP}{dt} = 0\right] \max.$	Pesca máx ima de equilibrio sostenido

Pesca por unidad de esfuerzo (c.p.u.e.)

Vamos a suponer que la pesquería opera sobre el stock de tal for ma que una unidad de esfuerzo pesquero produce el mismo efecto relativo en el stock, o sea que captura el mismo porcentaje del stock, cuales quiera sean el tiempo y lugar en que se aplica dicho esfuerzo pesquero. Luego:

ø F = K $_2$ F $_t,$ donde: K $_2$ = Constante de proporcionalidad $F_t = \text{N\'umero de unidades de esfuerzo pesquero.}$

por lo tanto: $P \not o F = K_2 PF_t$ (11)

por tanto: la captura por unidad de esfuerzo es:

$$\frac{P K_2 F_t}{F_t} = K_2 P \dots (12)$$

Lo cual significa que la captura por unidad de esfuerzo es proporcional a la magnitud del stock. Más explícitamente, la ... c.p.u.e. promedio, durante un período dado de tiempo, será proporcional al tamaño promedio del stock encontrado por la pesque ría durante ese período. La c.p.u.e. promedio anual, ó algún otro período de tiempo más corto, se ha empleado ampliamente por los biólogos pesqueros para medir cambios relativos en el tamaño de las poblaciones de peces ó, dicho de otra forma, la c.p.u.e. es una forma de medir la magnitud de la población, la abundancia del stock, siempre y cuando la premisa originalmente establecida se cumpla, esto es, que la c.p.u.e. sea verdaderamente proporcio nal a la biomasa del stock explotado.

Determinación de la condición en que se encuentra un stock y métodos para calcular los rendimientos de equilibrio.-

$$\frac{dP}{dt} = f (P) - P \not o F$$

esta ecuación fue establecida en (10) con f (P) = K_1 P (L-P) y además, se estableció que:

 $\phi F = K_2F_t$ (Coeficiente instantáneo de mortalidad por pesca), luego:

$$\frac{dP}{dt} = f (P) - K_2 F_t P,$$

integrando a lo largo de un año:

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\ f(P) - K_{2}F_{t} \end{cases}$$

$$P_{0} = \begin{cases} f(P) - K_{2}F_{t} \\$$

De donde se decide que si usamos U para simbolizar la c.p.u.e. promedio, se cumplirá que:

$$U = \frac{K_2 F_t P}{F_t} = K_2 P$$

$$P = \frac{1}{K_2} U \quad \text{(Población media)}$$

Ahora bien, una buena estadística pesquera debe proporcionar:

 $f_t = N^c$ de unidades de esfuerzo pesquero en el año considerado.

 K_2 F_t $P = Captura total en un año particular <math>U = c \cdot p \cdot u \cdot e \cdot p$ promedio

datos básicos que permitirán calcular aproximadamente:

 P_{O} = Biomasa al inicio del año

 $P_1 = Biomasa$ al final del año

Relación entre la tasa cruda de mortalidad total y el coeficiente instantáneo de mortalidad total.-

Partamos de la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{dD}{dt} = Z N_t$$

que establece que el número de muertos en un instante dado es proporcional al número de individuos presentes.

En esta ecuación tenemos:

 $D = N^{\circ}$ de peces muertos dentro de un período dado

t = Tiempo

 N_{t} = Número de individuos presentes al cabo del tiempo t.

Z = Coeficiente instantáneo de mortalidad total.

Obviamente, si $N_{_{\mathrm{O}}}$ es el número inicial de individuos:

$$D_{\mathbf{t}} = N_{\mathbf{o}} - N_{\mathbf{t}}$$

ó

$$N_t = N_0 - D_t$$

Por tanto la anterior ecuación diferencial puede ser escrita así:

$$\frac{dD}{dt} = Z (N_o - D_t).$$

$$\frac{dD}{N_0 - D_+} = Zdt ,$$

Integrando entre 0 y t, correspondientes a 0 y Dt, respectivamente, pondremos:

$$\int_{0}^{D_{t}} \frac{dD}{N_{o} - D_{t}} = Z \int_{0}^{t} dt$$

$$\begin{bmatrix} - \ln (N_0 - D_t) \end{bmatrix}^{D_t} = \begin{bmatrix} z t \end{bmatrix}^t_0$$

-
$$\ln (N_o - D_t)$$
 - $(-\ln N_o)$ = Zt

$$ln N_o - ln (N_o - D_t) = Zt$$

$$\frac{\ln \frac{N_o}{N_o - D_t}}{N_o - D_t} = Zt ,$$

invirtiendo:

$$\frac{\ln \frac{N_{\circ} - D_{t}}{N_{o}} = -Zt}{N_{o}}$$

$$\frac{N_{o} - D_{t}}{N_{o}} = e^{-Zt}$$

$$\frac{N_{o}}{N_{o}} - \frac{D_{t}}{N_{o}} = e^{-Zt},$$

Si ponemos
$$\frac{D_{t}}{N_{o}}$$
 a (tasa cruda de m. total)

$$-Zt$$
1 - a = e

6 -Zt
a = 1 - e (14)

La tasa cruda de mortalidad total puede tomar valores entre O y 1, esto es:

$$0 \le a \le 1$$
.

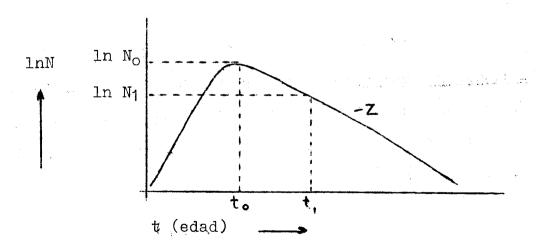
Si a es la tasa cruda de mortalidad total.

1 - a = S, será la tasa de supervivencia y quedará totalmente definida así:

$$S = \frac{N_t}{N_o} \dots (15)$$

¿Cómo se determina en la práctica el valor de Z?

Para determinar el valor de Z se emplean las curvas de pesca de Edser-Varanov, quiénes establecieron que si se efectúa una pesca representatira, la curva que se obtiene al plotear ln N contra t adquiere la siguiente forma:



Podemos escribir de acuerdo a lo establecido en (14):

ó

$$ln S = -Zt$$

y de acuerdo a (15):

$$1n \frac{N_t}{N_0} = -Zt$$

ó

$$\ln \frac{N_o}{N_t} = Zt$$

$$z = \frac{1}{t} \quad \ln \frac{N_0}{N_+}$$

$$Z = \frac{\ln N_o - \ln N_t}{t}$$

para t = 1:

$$Z = ln N_o - ln N_t$$
.

Ejemplo de la aplicación del modelo logístico a la pesquería de Halibut(<u>Hippoglossus vulgaris</u>) del Pacífico Norte. (M. B. Schaefer (1954): "Some aspects of the Dynamics of Populations important to the management of the commercial marine fisheries. Bol. IATTC Vol. 1 (2), pp. 27-56).

Como en la ecuación logística del crecimiento empleada por Schaefer interviene la constante 1/K₂, deberemos comenzar por computar esta inversa. Los experimentos de marcación indicaron para esta pesquería una tasa cruda de mortalidad por pesca de 47%, luego tenemos:

0.47 = 1 - e
$$^{-F_t K_2}$$

e $^{-F_t K_2}$ = 0.53
 $F_t K_2$ = 0.635
como F_t = 494078 skates (en 1926); pondremos:
494078 K_2 = 0.635
 $1/K_2 = \frac{494078}{0.635} = 778 \times 10^3$

Multiplicando los valores de U de cada año por $1/K_2$ se obtienen estimados de P (columna 4 de la tabla). Interpolando entre su cesivos valores de P, se obtienen estimados del stock al comien zo de cada año (columna 5). Las diferencias de los valores para años sucesivos indican el aumento o disminución del stock que re sulta de la captura tomada durante el año (AP, columna 6). De acuerdo con la ecuación (13) se agrega ΔP a la captura anual pa ra obtener f (P), la captura anual de equilibrio correspondiente a P (columna 7).

Estimados de la captura de equilibrio para la población del Halibut del Pacífico de la región sur de Cabo Spencer. (Hippoglossus vulgaris)

			Anton Australia - rationale, parlation or successional appropriate	andre - again, and again and a supply distribute and a supply a sup		
Años	Captura en miles de libras (K ₂ F _t P)	C.p.u.e. e libras por "skate" (U= K ₂ P)		Población	Inamemon	Pesca de <u>e</u> quili brio f (P)
11111111111111111111111111111111111111	44, 023 30, 26, 37, 208 30, 37, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 38, 38	513086417337938754514348571324559 741.88887655554433445566666666788888 111888876555544334455666666666788888	988666544434947937875-6916503910 1837369843124947937875-6916503910 18373659843908606180285592683910 18373659843908606180285595075096678 18373659844390860618028559508910 18378787556666666666666666666666666666666	97655423637731111310776888758076655 97655423637331111310776888758076655 9765542363333223344455548456666666666666666666666666666	- 14,082 - 10,542 - 1,3200 + 1,3200 + 1,36435 - 1,3645 - 1,365 - 1,365	160,477 160,47988 1606

(1915)
$$\frac{1}{K_2}$$
 U = 778 x 10³ x 117.5 = 91,415 (miles de libras)

$$P_0$$
 (1916) = $\frac{P_0 + P_1}{2} = \frac{91.415}{2} + \frac{88.770}{2} = 90.092$ (miles de lbs.)

$$\Delta^{P}(1916) = P_{1} - P_{0} = 76,010 - 90,092 = -14,082$$
 (miles de lbs.)
 $f(P)(1916) = P_{1} - P_{0} + K_{2}F_{t}P = -14,082 + 30,278 = 16,196$ (miles de libras)

Ahora tenemos los estimados del stock y la captura de equilibrio obtenibles de ese mismo stock para los años de 1916 a 1946. Plo teando f (P) contra P se espera que los puntos caigan sobre una curva que será una parábola, si f (P) es la logística, salvo la intervención de influencias perturbadoras. En efecto, debido a la intervención de factores ambientales aleatorios, errores en las medidas, y otras fuentes de variación incontrolables, los puntos ten derán a dispersarse alrededor de la curva parabólica teórica. Observando la tendencia del ploteo de f (P) contra P podemos determinar la relación media que existe entre captura de equilibrio y el tamaño de la población. Esto se ha graficado en la Figura 1, donde los puntos sólidos corresponden a los malores anuales de la tabla y las cruces representan los promedios calculados para cada intervalo de 10 unidades de U.

Es desafortunado que no se disponsa de datos fidedignos para los primeros años cuando la población era, presumiblemente, más grande, lo cual haría posible estimar capturas de equilibrio para poblacio nes más grandes y de esta forma encontrar dónde ocurre el máximo.

Este ejemplo pone claramente de manifiesto la necesidad de obtener datos estadísticos adecuados de la pesquería durante sus primeras fases de desarrollo.

En paso siguiente es ajustar la parábola a los valores medios (crucas) de la Figura 1 (con P y f (P)) en miles de libras y U en libras por "skate").

Fouación de la parábola.- La ecuación general de la parábola es:

$$Y = a + bx + cx^2$$

Para el caso de la ecuación logística en la que la parábola comienza en el origen de los ejes y es convexa, se tendrá:

$$Y = px - sx^2$$

Luago partiendo de la ecuación logística original:

Foro P = 1 U, $V = K_2P$, reemplazandos

$$f(P) = (K, (\frac{1}{K_2}, U) (L - \frac{1}{K_2}, U)$$

$$\hat{z}^{(P)} = (K_1 U) (K_2 L - U)$$

$$X_2L - L_u = U_{\text{max.}}$$
 (c.p.u.e. máxima)

$$\frac{\widehat{T}(P)}{\widehat{X}_2} = \underbrace{K}_{U} U (L_{U} - U) \dots (16)$$

$$f^{(P)} = \underbrace{K_1 L_u U - K_1 U^2}_{K_2^2} \dots (17)$$

$$Y = b \quad x - c \quad x^2$$

Sean x e Y nuestras variables, construyamos la siguiente tabla:

x	Υ .	x ²	w=x ² 100	xw	ху	_w 2	wy
u'	f (P)	(u') ²		u (u') ² 100	u' f(P)	(u') ² 2	(u') ² f(P)
46.5 53.7 62.8 74.8	24,178 24,313 26,311 30,669	2162.25 2883.69 3943.84 5595.04	21.62 28.84 39.43 55.95	1005.330 1548.708 2476.204 4185.060	768,626,4 1'124,277.0 1'305,608.1 1'652,330.8 2'294,041.2 2'235,022.3	467.4244 831.7456 1554.7249 3130.4025	285,962.08 522,728.36 701,186.92 1'037,442.73 1'715,930.55 1'861,534.78

5

22907.55

15509.504 9!379,905.8 10989.4274 6'124,785.42

Reemplazando estos valores en las ecuaciones simultáneas:

$$\sum x^2 b + \sum xw c^{\dagger} = \sum (xy)$$

 $(\sum xw)b + \sum w^2 c^{\dagger} = \sum (wy)$

22,907.55 b + 15,509.504
$$c^1 = 9!379,905.8$$
 (x 15,509.504) 15,509.504b + 10,989.427 $c' = 6!124.785.42$ (x 22,907.55)

$$240^{\circ}544,714.326 \text{ c}_{1}^{1} = 145,477^{\circ}686,525$$

 $-251^{\circ}740,848.474 \text{ c}_{1}^{1} = 140,303^{\circ}828,248$
 $-11^{\circ}196,134.148 \text{ c}_{1}^{1} = 5,173^{\circ}858,277$

$$c^1 = -\frac{5,173!858,277}{11!196,134.148} = -462$$

$$e = -\frac{462}{100} = -\frac{4.62}{100}$$

$$c = \frac{K_1}{K_2^2} = -4.62$$

Reemplazando C¹ en cualquiera de las dos ecuaciones para hallar b, (en este caso en la 1ra. ecuación).

$$b = 16'545.296.648 = 722.26$$

22,907.55

pero

$$b = \frac{K_1}{K_2^2} L_u = 722.26$$

por tanto

$$722.26 = 4.62 L_{11}$$

$$L_u = \frac{722 \cdot 26}{4 \cdot 62} = 156 \cdot 33$$
 lbs/_{skate} Entre la c.p.u.e. máximo

Reemplazando estos valores en la ecuación (16), se tiene f(P) = 4.62 U (156.33 - U)

Ahora para determinar la pesca de equilibrio para cada valor de U, se construye la siguiente tabla:

U	f (P)
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 L ₁₁ = 156.33	6,760.6 12,597.2 17,509.8 21,498.4 24,563.0 26,703.6 27,920.2 28,212.8 27,581.4 26,026.0 23,546.6 20,143.2 15,815.8 10,564.4 4,389.0
a co	

Esta curva se ha ploteado en la Figura 1. Puede verse que tiene un máximo valor de 28.23 millones de libras para la captura de equilibrio a una c.p.u.e. de 78.05 libras por skate.

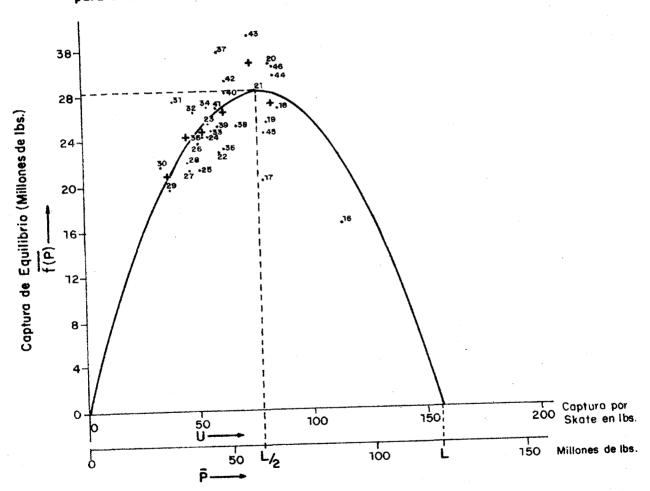
MODELOS ANALITICOS

Modelo de Baverton y Holi. - Requiere de más datos básicos como:

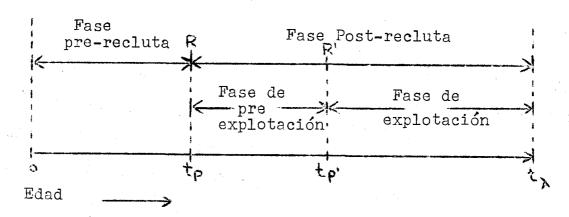
- a) Reclutamiento
- b) Mortalidad
 - c) Crecimiento

Reclutamiento. Definiremos la edad de reclutamiento t_p , como la edad en que los peces entran al área de pesca, sin ser necesaria mente capturables. El número de peces procedentes de cada desove y que entran al área de pesca lo denotamos con R y a partir de \underline{e} se momento se les considera como post-reclutas.

FIG. 1
Relación entre la Población Media y los Estimados de Captura de Equilibrio para el Halibut del Pacífico del Sur de Cabo Spencer (<u>Hippoglossus vulgaris</u>)



Si los peces recien reclutados son o no retenidos por las artes de pesca, depende de las propiedades selectivas de estas artes. La edad a la cual los peces devienen pescables y por tanto, entran a la fase de explotación se la representa con t_{p^i} y al número de pe ces de un desove dado que sobreviven hasta esta edad se les simboliza con R^1 ; la longevidad de la especie se la representa con t_{λ} (En ciertos modelos, teóricamente, t_{λ} es infinito). El siguiente dia grama ilustra estas definiciones.



Dabe advertirse que miéntras que t_p puede ser controlada por el hombre, t_p es un parametro con un definidosignificado biológico. Por ejemplo la "Platija" (<u>Pleuronectes platessa</u>) tiene como nur serías aguas someras en las que vive hasta los dos o tres años de edad, que es cuando desciende a aguas más profundas (que son las áreas de pesca) en las cuales se tornan capturables. En consecuencia, en esta especie se cumple que $t_p = t_p$. En cambio en el haddock (<u>Gadus aeglefinus</u>) $t_p \neq t_p$.

En resumen podríamos anotar:

t_p = Edad en que el individuo ingresa al área de pesca y no es necesariamente capturado.

t = Edad en que el individuo está en el área de pesca y deviene pescable.

t, = Longevidad o máximo número de años que vive el pez.

R = Número de individuos que ingresa al área de pesca.

R' = Número de individuos que ingresa a la fase de explotación.

Mortalidad .- Puede ser:

Mortalidad Natural. - Es el efecto combinado de varios factores actuando simultáneamente. Factores intrín secos: senilidad, parasitismo, enfermeda des. Factores extrínsecos: Efecto de predación de una o más especies predadoras; acción letal de factores físicos del medio ambiente.

Mortalidad por pesca. - Efecto de la depredación por parte del hombe. bre.

COEFICIENTE INSTANTANEO DE MORTALIDAD NATURAL (M)

 $\left(\frac{dN}{dt}\right) = -MN \dots (18) \qquad \text{Donde}:$

N = Número de individuos

t = Tiempo

M = Coeficiente instantáneo de mortalidad por pesca.

$$N_{\dot{t}} = N_{o} e^{-Mt} \qquad \dots (19)$$

COEFICIENTE INSTANTANEO DE MORTALIDAD POR PESCA (F)

Supongamos que una embarcación con redes arrastreras se encuentre pescando sobre un stock de individuos bentónicos distribuídos uni formemente en el fondo y que esta embarcación pesca, en cada arrastre, el mismo porcentaje de individuos; llamemos p a este porcenta je constante de individuos pescados y N al número de individuos presentes en el fondo. Por lo tanto:

Generalizando: n arrastro

(p q n-1) N

q ⁿ N

N° de captur<u>a</u> dos en n arra<u>s</u> tres

No de sobr<u>e</u> vivientes al cabo de n <u>a</u> rrastres.

Si q es una constante podremos (El exponente es negativo porque poner: $q = e^{-a}$ q fluctúa entre 0 y 1)

$$q^{n} = (e^{-a})^{n} = e^{-an}$$

Hagamos:

an = F¹ = eficiencia de la embarcación

 $a = \frac{F^1}{n}$

 $q = e^{-\frac{F^1}{n}}$, pero $\frac{F^1}{n}$ es muy pequeño, por necesidad, y en estas condiciones se cumple que:

Lim q = Lim $e^{-\frac{F^1}{n}} = 1 - \frac{F^1}{n}$, esto implica que:

Lim p = Lim $(1 - q) \implies 1 - (1 - \frac{F^1}{n}) = \frac{F^1}{n}$

Pues bien, habíamos dicho que el número de peces capturados en el primer arrastre fue pN y reemplazando p por $\frac{F^1}{n}$ y considerando un arrastre de una duración infinitamente pequeña podremos escribir, utilizando la notación del cálculo infinitesimal:

$$\mathbf{F}^{1}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}\mathbf{t}}\right) = -\frac{\mathbf{F}^{1}}{\mathrm{n}}$$

Si en lugar de una embarcación, fueran r embarcaciones, tendríamos:

$$\mathbf{F} \left(\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} \right) = - \frac{\mathbf{r} \mathbf{F}^1}{\mathrm{n}} \mathbf{N} \dots (20)$$

y si consideramos que:

r = Número de embarcaciones que operaron en el año

F¹ = Eficiencia constante de una embarcación

n = Número constante de arrastres por año

podremos englobar r, F¹ y n en una sola constante F, así:

 $\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}^1}{\mathbf{n}} = \mathbf{F}$, denotando con F el efecto de la mortalidad causada por toda la flota pesquera,

de donde resulta que (20) deviene:

$$\mathbf{F} \left(\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} \right) = \mathbf{FN} \dots (21)$$

Integrando:

$$\int_{N_{0}}^{N_{t}} \frac{dN}{N} = -F \int_{0}^{t} dt$$

$$\begin{bmatrix} \ln N \end{bmatrix}_{N_0}^{N_t} = -F \begin{bmatrix} t \end{bmatrix}_{t_0}^{t}$$

$$\begin{array}{lll} \ln N_{\rm t} - \ln N_{\rm o} &=& - \ {\rm F} \ ({\rm t} - {\rm t_o}) \\ {\rm haciendo} \ {\rm t_o} &=& 0 \ {\rm s} \\ \\ \ln \frac{N {\rm t}}{N_{\rm o}} &=& - \ {\rm Ft} \\ \\ \frac{N {\rm t}}{N_{\rm o}} &=& {\rm e} \end{array}$$

$$N_{t} = N_{o} e^{-Ft}$$
 (22)

Por otra parte, como pusimos:

$$\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}^1}{\mathbf{n}} = \mathbf{F}$$

$$F = \frac{1}{n} \quad (rF^1)$$

Esto indica que el coeficiente instantáneo de mortalidad por pesca es proporcional al esfuerzo pesquero ${
m rF}^1$.

rF¹ = esfuerzo pesquero

$$_{\rm F}\left(\frac{\rm dN}{\rm dt}\right) = 0$$

Solo en el caso en que ninguna embarcación repita el rastreo donde otra ya lo ha realizado.

Es de advertir que:

$$_{\rm M}\left(\frac{{
m dN}}{{
m dt}}\right)=$$
 - MN y $_{\rm F}\!\left(\!\frac{{
m dN}}{{
m dt}}\!\right)=$ - FN son aditivos

a diferencia de a = 1 - e que no lo es.

Solo será constante F, si el esfuerzo pesquero permanece estab<u>i</u> lizado.

Habiendo establecido que F^1 = an (23)

y que
$$F = \frac{rF^1}{n}$$

$$\therefore F^{1} = \underbrace{n F}_{r}$$

y reemplazando en (23)

$$an = \underbrace{n \ F}_{r}$$

$$a = \underbrace{F}_{r} \dots (24)$$

Por otra parte, como pusimos:

$$q = e^{-a}$$

$$-a = ln q$$

$$a = - \ln q$$
,

$$a = - \ln (1 - p) \dots (25)$$

Combinando (24) y (25)

$$\frac{F}{r} = -\ln (1 - p)$$

$$F = - r \ln (1 - p)$$

pero - ln (1 - p) = p -
$$\frac{p^2}{2}$$
 + $\frac{n^3}{3}$ - $\frac{1}{4}$ + ... + $\frac{p^n}{r}$

Esta serie es convergente para pequeños valores de p. En efecto:

$$\lim_{p\to 0} \left[-\ln (1-p) \right] = p$$
; entonce si p es muy pequeña

F = rp

donde:

F = Coeficiente instantáneo de mortalidad por pesca

r = Número de embarcaciones

p = Fracción de pesca por unidad de arrastre

Por lo tanto, F es proporcional al número de embarcaciones.

DEFINICIONES NECESARIAS

Monto capturado por la embarcación considerada

en un lugar, tiempo y lapso de tiempo determinados.

Monto pescado al mismo tiempo por una embarcación

standard en el mismo lugar y en el mismo lapso de

tiempo que la otra embarcación.

Esfuerzo total de pesca. Puede definirse simplemente como el tiempo total invertido en la pesca, por toda la flota pesquera durante un tiempo determinado, por ejemplo, el total de horas standarizadas de pesca en un año.

Intensidad de pesca. Cuando se tome en consideración la forma como se distribuye el esfuerzo de pesca dentro del área batida por la flo ta pesquera, entónces surge la necesidad de definir el concepto de intensidad de pesca. Por ejemplo, el total de horas standarizadas de pesca en un año por unidad de área. Entónces, en sentido estricto, F sólo es proporcional a la intensidad de pesca.

Acabamos de establecer que:

$$_{\rm M} \left(\frac{\rm dN}{\rm dt} \right) = - \, \rm MN$$

y como M actúa entre las edades tp y t, deberemos poner:

$$M\left[\frac{dN}{d(t-tp)}\right] = -MN \dots (26)$$

De otro lado

$$_{\rm F} \left(\frac{\mathrm{dN}}{\mathrm{dt}} \right) = - \, \mathrm{FN}$$

y como F sólo actúa entre t y $t_n 1$:

$$F\left[\frac{dN}{d(t-t_{D}^{1})}\right] = -FN$$

Integrando la ecuación (26)

$$\int_{N_{o}}^{N_{t}} \frac{dN}{N} = -M \qquad \int_{p}^{t} d(t - t_{p})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & n & N \end{bmatrix}_{N_o}^{N_t} = -M \left[t - t_p \right]_{t_n}^{t}$$

In
$$N_{t} - \ln N_{o} = -M \left[(t - t_{p}) - (t_{p} - t_{p}) \right]$$

$$\ln \frac{N_{t}}{N_{o}} = -M (t - t_{p})$$

$$\frac{N_{t}}{N_{o}} = e^{-M (t - t_{p})}$$

$$N_{t} = N_{o} e^{-M (t - t_{p})} \dots (27)$$

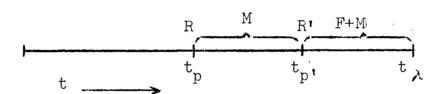
 $N_{\rm o}$ es el número de individuos a la edad $t_{\rm p}$ y lo representamos con R, luego (27) deviene:

$$N_t = Re = M(t - t_p)$$

relación que da el número de sobrevivientes (N_t) a partir de R individuos iniciales (reclutas) cuando sobre éllos ha actuado M durante el tiempo ($t-t_p$).

Si se desea saber cuántos de estos R sobreviven hasta ser captura dos por las artes de pesca, es decir cuanto vale R^1 , pondremos: $R^1 = R e^{-M} (t_p 1 - t_p)$

Desde t_p 1 a $t_{\pmb{\lambda}}$ actúa además de la mortalidad natural la mortalidad por pesca



De modo similar:

$$\frac{dN}{d(t-t_p1)} = -(F+M) N$$

Integrando
$$\int_{N_{o}}^{N_{t}} \frac{dN}{N} = -(F + M) \int_{t_{p}1}^{t} d(t - t_{p}1)$$

$$\left[\ln N\right]_{N_{o}}^{N_{t}} = -(F + M) \left[t - t_{p}1\right]^{t}$$

$$\ln N_{t} - \ln N_{o} = -(F + M) \left[(t - t_{p}1) - (t_{p}1 - t_{p}1) \right]$$

$$\ln N_{t} = -(F + M) (t - t_{p}1)$$

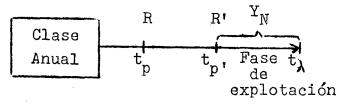
$$\frac{N_{t}}{N_{0}} = e^{-(F + M)(t - t_{p}1)}$$

$$N_{t} = N_{o}$$
 e - (F + M) (t - $t_{p}1$) (28)

Pero N_o es el número de individuos a la edad $t_p 1$, o sea R^1 , luego la (28) resulta:

$$N_t = R^1 e^{-(F + M)(t - t_p 1)}$$
 (29)

Con estos razonamientos podemos ya abordar el problema de determinar cual será el rendimiento total en números de una clase anual determinada, a través de su vida en la pesquería, o lo que es lo mismo, en su fase de explotación.



Y_N = Número de individuos tom<u>a</u>
dos por la pesquería dura<u>n</u>
te todo el tiempo que una
clase anual pasa en la f<u>a</u>
se de explótación.

Trabajando ahora con la ecuación

$$F\left[\frac{dN}{d(t-t_{p}1)}\right] = -FN$$

y como, indudablemente, la tasa de mortalidad por pesca constituye la tasa de rendimiento del stock, es evidente que podremos poner: $\frac{d Y_N}{d (t-t_n)} = FN \dots (29 a)$

y sustituyendo N por su valor en (29)

$$\frac{d Y_{N}}{d (t - t_{p}1)} = F \underbrace{R^{1} e^{-(F + M)(t - t_{p}1)}}_{N_{t}}$$

Integrando

$$\int_{t_{p}1}^{t_{N}} = \int_{t_{p}1}^{t_{N}} F R^{1} e^{-(F + M) (t - t_{p}1)} d(t - t_{p}1)$$

$$Y_{N} = \int_{t_{p}^{1}}^{t} F R^{1} e^{-(F + M)t + (F + M)t_{p}^{1}} d(t - t_{p}^{1})$$

$$Y_{N} = \int_{t_{p}1}^{t_{A}} F R^{1} e^{-(F + M) t} e^{(F + M)t_{p}1} d(t - t_{p}1)$$

$$Y_{N} = F R^{1} e^{(F + M)t} t_{p}^{1}$$

$$t_{p}^{1}$$

$$t_{p}^{1}$$

Esta ecuación da el número de individuos capturados de una clase anual determinada durante toda su permanencia en la pesquería, en términos de los coeficientes F y M y del número de reclutas que devinieron pescables, R'.

En la práctica el hombre no sólo explota una clase anual sino todas las clases anuales presentes en el stock en un año determinado. Veamos, pues cuál será la ecuación que de el rendimiento anual de un stock en equilibrio dinámico, esto es aquel en el que M, F y \mathbb{R}^1 hayan permanecido constantes a través de un numero de años igual a $(t - t_n 1)$.

Designemos con R_0 al número de individuos de la primera clase anual que ingresa a la fase de explotación. Inmediatamente empieza a actuar sobre estos R_0^1 las mortalidades F y M, y el número de sobre viventes en cualquier momento del año será R_0^1 e $^{-(F+M)}$, donde \emptyset indica cualquier fracción de un año, pudiendo entónces variar en tre 0 y 1. En consecuencia, para saber cuántos sobreviven al fin del primer año tomaremos el valor máximo de $\emptyset=1$.

Por lo tanto, siguiendo estos razonamientos se tiene:

R¹ o = Primera clase anual que ingresa a la fase de explotación.

R¹ o e -(F + M) = Número de sobrevivientes en cualquier momento del primer año.

 $R^{1}_{o} e^{-(F + M)}$ = Número de sobrevivientes al fin del primer año.

 $R^{1}_{O} e^{-(F + M)} + R_{I} e^{-(F + M)\phi} = Número de sobrevivientes en cual$

 $R_{0}^{1} = -2(F + M) + R_{1} = -(F + M) = (R_{0}^{1} = -(F + M) + R_{1}^{1} = e^{-(F + M)} = -(F + M) = -(F$

Número de sobrevivientes en cual quier momento del segundo año.

 $(R_0^1 e^{-(F + M)} + R_1^1 e) e^{-(F + M)}$. Número de sobrevivientes al fin del segundo año.

$$(R^{1}_{0} e^{-(F+M)} + R^{1}_{1} e^{-(F+M)} + R^{1}_{2}) e^{-(F+M)\phi} = Numero de sobreviero de so$$

$$R^{1}_{0} e^{-3(F + M)} + R^{1}_{1} e^{-2(F + M)} + R^{1}_{2} e^{-(F + M)} =$$

$$(R^1_0 e^{-2(F+M)} + R^1_1 e^{-(F+M)} + R^1_2) e^{-(F+M)} = Número de sobre$$
vivientes el fin
del tercer año

Generalizando, el número de sobrevivientes N \emptyset en cualquier momento \emptyset del año λ es:

$$\frac{N \phi}{A \tilde{n} \circ \lambda} = \begin{bmatrix} R^{1} \circ e^{-(F + M)} & (\lambda - 1) + R_{1}^{1} e^{-(F + M)} & (\lambda - 2) \\ + R_{2}^{1} e^{-(F + M)} & (\lambda - 3) & \dots + R^{t} \\ + R \lambda - 1 \end{bmatrix} e^{-(F + M)\phi} \dots (31)$$

En cualquier momento del año $\lambda+1$, R $^1_{\ 0}$ ya no existe y el número de sobrevivientes será:

Como hemos supuesto que R^1 es constante, es decir que el número de reclutas que ingresa a la pesquería es siempre igual, se tendrá que: $R^1_0 = R^1_1 = R^1_2 \cdots = R^1_\lambda$

Este hecho de admitir que todas las R^1 sean iguales hace que las ecuaciones (31) y (32) sean iguales, lo que quiere decir que, al pasar del año λ a λ + 1, el stock ha llegado a su equilibrio dinámico.

Ahora veamos cuál es la tasa de rendimiento en número en cualquier momento del año en que el stock alcanzó su equilitrio dinámico De acuerdo a (29a) pondremos:

$$\frac{d (Y_N)}{d \not o} = FN \not o$$
y sustituyendo N \overline{p} por su valor en (33)
$$\frac{d Y_N}{d \not o} = FR^1 e^{-(F + M)} \not o \sum_{p=0}^{\lambda-1} e^{-(F + M)p}$$

Como nos interesa saber cual es el rendimiento en todo el año proce demos a integrar entre O, comienzo del año, y 1, fin del año:

$$Y_N = FR^1$$
 $\sum_{p=0}^{\lambda-1} e^{-(F + M)p}$ $\int_{0}^{1} e^{-(F + M)p} dp$

$$Y_{N} = FR^{1} \qquad \sum_{p=0}^{\lambda-1} e^{-(F + M)p} \left[-\frac{e^{-(F + M)p}}{F + M} \right]_{0}^{1}$$

$$Y_{N} = FR^{1} \qquad \sum_{p=0}^{\lambda-1} e^{-(F + M)p} \left[\frac{e^{-(F + M)}}{F + M} - \frac{e^{-e^{-(F + M)}}}{F + M} \right]_{0}^{1}$$

$$Y_{N} = FR^{1} \qquad \sum_{p=0}^{\lambda-1} e^{-(F + M)p} \left[-\frac{e^{-(F + M)} + 1}{F + M} \right]_{0}^{1}$$

$$Y_{N} = \frac{FR^{1}}{F + M} \qquad \sum_{p=0}^{\lambda-1} e^{-(F + M)p} \left(1 - e^{-(F + M)} \right) \dots (34)$$

Ahora trabajando sólamente con la expresión:

$$\sum_{\mathbf{p}=0}^{\lambda-1} e^{-(\mathbf{F}+\mathbf{M})\mathbf{p}} \dots (35)$$

Para simplificar pongamos:

$$x = e^{-(F + M)}$$

Luego la (35) deviene:

$$\sum_{p=0}^{\lambda-1} x^p$$

cuya expansión es:

$$\sum_{p = 0} x^p = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots + x^{\lambda-1}$$
 la cual es una serie geométrica.

y sabemos por álgebra que la suma de una serie geométrica es:

$$S = a \left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right) = a \left(\frac{1 - r^n}{1 - r}\right)$$

Donde:

a = Primer término

r = Razón común

n = Número de términos

y aplicando esta fórmula a nuestra serie:

$$\sum_{p=0}^{\lambda-1} x^p = \frac{\lambda}{1-x}$$

pero como $x = e^{-(F + M)}$, la expresión anterior resulta:

$$\sum_{p=0}^{\lambda-1} x^{p} = \frac{1 - e^{-(F + M)}}{1 - e^{-(F + M)}}$$

sustituyendo este valor en la ecuación (34) se tiene

$$Y_{N} = \frac{FR^{1}}{F + M} \left[\frac{1 - e^{-(F + M)\lambda}}{1 - e^{-(F + M)}} \right] (1 - e^{-(F + M)})$$

$$Y_{N} = \frac{FR^{1}}{F + M}$$
 (1 - $e^{-(F + M)\lambda}$ (36)

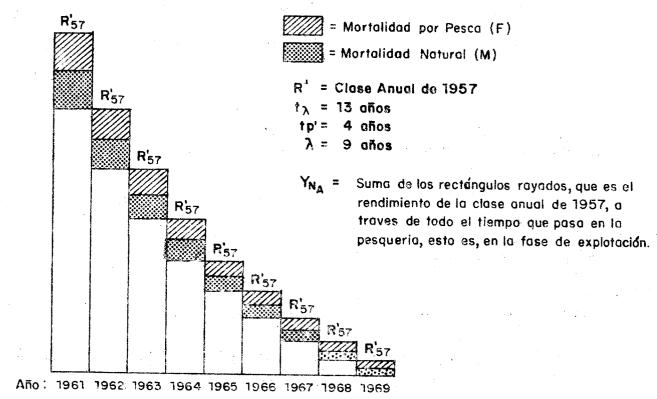
pero sabemos que $R^1 = R e^{-M(t_p 1 - t_p)}$, luego:

$$Y_{N} = \frac{F R e}{F + M} {}^{M} {}^{t} p^{1} - {}^{t} p) \qquad \left[1 - e^{-(F + M)\lambda} \right] \dots (37)$$

Esta es la ecuación que dá el rendimiento, en número de individuos de un stock en equilibrio en un año determinado y vemos que es igual al rendimiento, en número, de una sola clase anual a través de todo el tiempo que ella pasa en la fase de explotación, lo que se comprue ba cotejando las ecuaciones (30) y (37). Para objetivizar esta equivalencia nos remitimos a los dos gráficos siguientes:

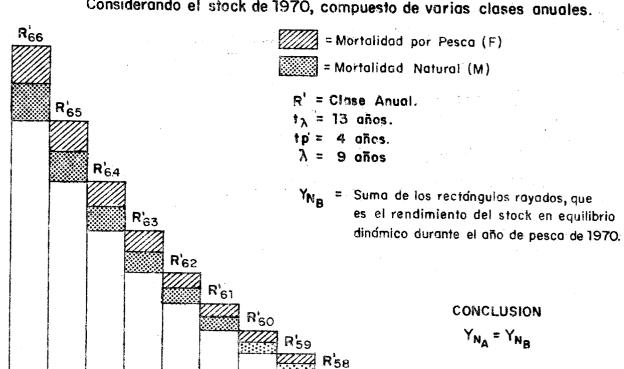
CASO A

Considerando una sola clase anual.



CASO B

Considerando el stock de 1970, compuesto de varias clases anuales.



Anual:1966 1965 1964 1963 1962 1961 1960 1959 1958

Se alcanza el equilibrio dinámico cuando los factores que gravitan sobre el stock se han estabilizado o sea que R¹, F y M se hacen constantes, durante un número de años no menor que t - t_n1. Dividiendo por R¹ la ecuación (36):

$$\frac{\mathbf{Y}}{\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{R}^{1}}} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{F} + \mathbf{M}} \quad \left[1 - e^{-(\mathbf{F} + \mathbf{M})\lambda} \right] \quad \dots \quad (38)$$

Se obtiene el rendimiento por recluta que ingresa a la fase de e $\underline{\mathbf{x}}$ plotación:

Y cuando $t_p = t_p 1$, $R = R^1$, y en este caso:

$$\frac{\mathbf{Y}_{\mathbf{N}}}{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{F} + \mathbf{M}} \left[1 - e^{-(\mathbf{F} + \mathbf{M}) \lambda} \right] \dots (39)$$

da el rendimiento por recluta que ingresa al área de pesca. Trabajan do ahora con la ecuación (38) observamos cómo varía:

cuando cambia F, My >

Ejercicio 1.-

Usando la ecuación (38) calcular $\frac{Y_N}{r^{\frac{1}{2}}}$ cuando:

$$M = 0.1, 0.4$$

$$t_{\lambda} = 13 \text{ años}$$

$$t_{\lambda} = 13 \text{ años}$$

 $t_{D} = 3 \text{ años}$

$$F = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, \infty$$

Tabla 1.- Cuando M = 0.1

57	F + M	F F + M	(F + M) λ	e-(F + M)λ	1 = e - (F + M)λ	$\frac{Y_{N}}{R^{1}}$
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0	0.9	0.67 0.80 0.86 0.89 0.91 1.0	5 7	0.3679 0.0498 0.0067 0.0009 0.0001 0	0.6421 0.9502 0.9943 0.9991 0.9999 1.0000	.0 0.637 0.795 0.862 0.890 0.910 1.000

Tabla 2. - Cuando M = 0.4

0.2 0.4 0.6 1 0.8 1	0.4 0 0.6 0.333 0.8 0.500 0.600 0.667 0.714	4 6 8 10 12 14	0.0133 0.0025 0.0003 0 0	0.9817 0.9975 0.9997 1 1 1	0 0.332 0.500 0.600 0.667 0.714 1
------------------------------------	--	-------------------------------	--------------------------------------	---	---

En la figura 2, se representa este ejercicio, el cual indica que al aumentar el esfuerzo de pesca, al rendimiento por recluta en número aumenta hasta cierto nivel en forma proporcional a F, para después hacerse casi nulo este aumento.

Ejercicio Nº 2.- Usando la ecuación:

$$\frac{Y_{N}}{R^{1}F} = \frac{1}{F+M} \left[1 - e^{-(F+M)\lambda} \right]$$

Calcular $\frac{Y_N}{R^1 F}$

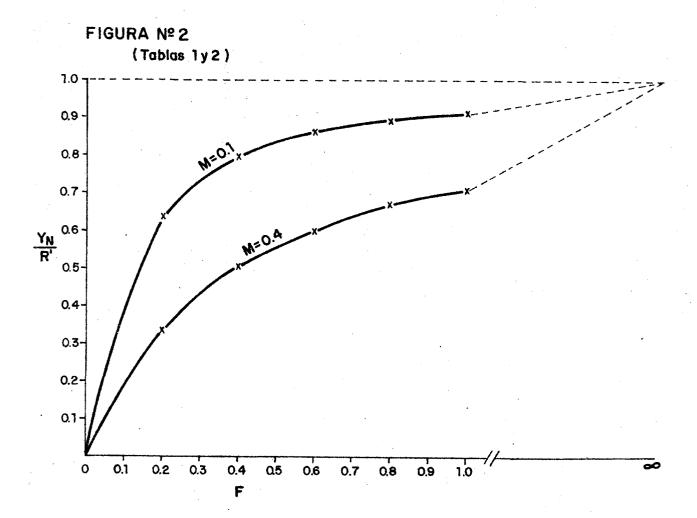


Tabla 3.-

F	De Tabla 1 $\frac{Y_{N}}{R^{1}} (M = 0.1)$	Y _N R ¹ F	De Tabla 2 $\frac{Y_{N}}{R^{1}}(N = 0.14)$	$\frac{Y_{N}}{R^{1}F}$
0.2 0.4 0.8 0.8 1.0	0.637 0.795 0.862 0.890 0.910 1.000	3.185 1.987 1.436 1.111 0.910	0 0.332 0.500 0.600 0.667 0.714 1.000	1.660 1.250 1.000 0.834 0.714

La gráfica de este ejercicio se muestra en la Figura 3, la cual pone de manifiesto que a medida que aumente el esfuerzo de pesca, la pesca por recluta por unidad de esfuerzo se hace más pequeña. Ejercicio Nº 3.-

Usando la ecuación

$$\frac{Y_{N}}{R} = \frac{F}{F+M} = \frac{-M(t_{p}1 - t_{p})}{F+M} \left[1 - e^{-(F+M)} (t_{\lambda} - t_{p}1)\right]$$

Cuando

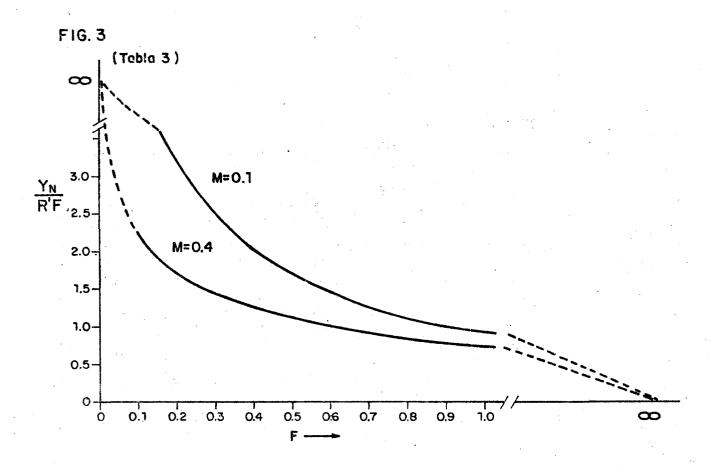
$$t_{p} = 1 \text{ año}$$

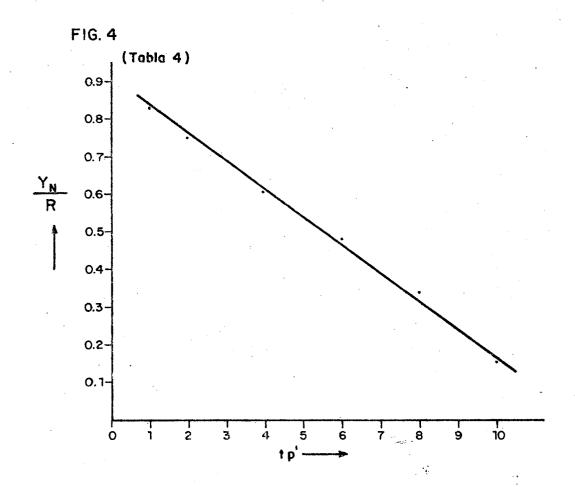
$$t_p! = 1, 2, 4, 6, 8, 10$$
 años

$$t_{\lambda} = 11$$
 años

$$F = 0.5$$

$$M = 0.1$$





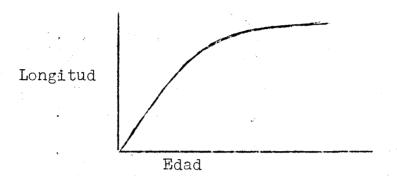
A	В	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	М	\mathbf{N}_{\cdot}	$\widetilde{ ext{N}}$	0
2 4 · 6 8	1 1 1 1	11 11 11 11	1 3 5 7	0.5 0.5 0.5 0.5	0.1 0.1 0.1 0.1	0.6 0.6 0.6	0.833 0.833 0.833 0.833 0.833 0.833	0.1 0.3 0.5 0.7	7 5 3	5.4 4.2 3.0 1.8	0.0452 0.01500 0.04979 0.16530	0.9048 0.7408 0.606 5 0.4966	0.7537 0.6171 0.5052 0.4040	0.99752 0.99548 0.98500 0.95020 0.83470 0.45120	0.7502 0.6087 0.4798 0.3373

La gráfica de este ejercico se representa en la Figura 4, la cual pone de manifiesto el lecho de que cuanto más tarda entra una clase anual a la fase de explotación tanto menor será el rendimiento por recluta en número.

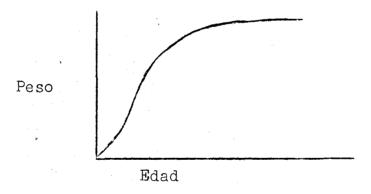
₹

EL CRECIMIENTO

La gráfica de la longitud del pez contra la edad por lo general es así:



Y si ploteamos peso contra edad, esta será una curva sigmoidea asimétrica en que el punto de inflexión se encuentra aproximadamente a 1/3 del peso asimitótico



Se han propuesto muchas ecuaciones para expresar el peso de un in dividuo en función de su edad. Las siguientes figuran entre las principales.

La ecuación de crecimiento de Ottestad (1933). Este autor concibe el crecimiento como el resultado de múltiples factores que in fluyen sobre el individuo en forma simultánea y al azar. La ecuación que propuso genera una curva sigmoidea simétrica lo cual no se ajusta a la realidad. Además los factores que influyen en el crecimiento no pueden actuar al azar sino, por el contrario, or denadamente, lo que da una curva asimétrica.

La ecuación del crecimiento de Verhulst. - Es similar a la ecuación del crecimiento de una población, pero con ligeras modificaciones.

Parte Verhulst de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dw}{dt} = aw - bw^2$$
 donde: $a,b = Constantes$

$$w = Peso del individuo$$

$$aw \longrightarrow Procesos anabólicos$$

$$bw \longrightarrow Procesos catabólicos$$

$$\frac{dw}{dt} = w (a - bw)$$

Invirtiendo la ecuación

$$\frac{dt}{dw} = \frac{1}{w (a - bw)}$$

$$dt = \frac{dw}{w (a - bw)}$$

Multiplicando ambos miembros por a

$$adt = \frac{adw}{w (a - bw)} = \frac{A}{w} + \frac{B}{a - bw} = \frac{A (a - wb) + Bw}{w (a - bw)}$$
 (40)

Siendo los denominadores iguales

$$adw = A (a - wb) + Ew$$

$$adw = Aa - Awb + Fw$$

factorizando adw = Aa + w (B - Ab)

$$B - Ab = 0$$

adw = Aa

$$A = dw$$

$$B = bdw$$

Reemplazando en (40)

$$adt = \frac{dw}{w} + \frac{bdw}{a - bw}$$

Integrando

$$a \int dt = \int \frac{dw}{w} + \int \frac{bdw}{a - bw}$$

$$at = \ln w + b \left[-\frac{1}{b} \ln (a - bw) \right] + C$$

at -
$$C = ln\left(\frac{w}{a - bw}\right)$$

$$e^{at-C} = \frac{w}{a - bw}$$

$$e^{at} e^{-C} = \frac{w}{a - bw}$$

haciendo
$$e^{-C} = c^1$$

$$C^{1} e^{at} = \frac{w}{a - bw} \cdot \dots \cdot (41)$$

despejando w

$$w = c^1 e^{at} (a - bw)$$

$$w = C^1 e^{at}a - C^1 e^{at} bw$$

$$w + c^1 e^{at} bw = c^1 e^{at} a$$

$$w (1 + C^1 e^{at} b) = C^1 e^{at} a$$

$$w = \frac{c^1 e^{at} a}{1 + c^1 e^{at} b}$$
 (42)

Si w_0 , cuando t = 0, la ecuación (41) se hace

$$C^1 = \frac{w_0}{a - bw_0}$$
 que es el valor de la constante de integración

Conociendo C¹, reemplazamos en (42)

$$w = \frac{\frac{w_0}{a - bw_0}}{1 + \frac{a - bw_0}{a - bw_0}} e^{at} b$$

Multiplicando el 2º miembro por a - bwo:

$$w = \frac{a w_0 e^{at}}{a - bw_0 + bw_0 e^{at}}$$

Multiplicando el numerador y denominador del 2º miembro por e-at

$$w = \frac{aw_{o}}{e^{-at}(a - bw_{o}) + bw_{o}} = \frac{aw_{o}}{ae^{-at} - bw_{o}e^{-at} + bw_{o}}$$

Dividiendo el numerador y denominador del 2º miembro por bwo

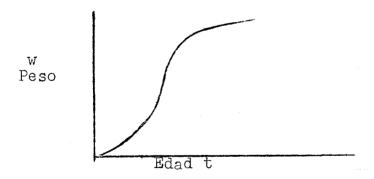
$$w = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}} - e^{-at} + 1$$

Si
$$\frac{a}{b} = k_1$$

$$w = \frac{k_1}{k_1 e^{-at} - e^{-at} + 1} = \frac{k_1}{(k_1 - 1) e^{-at} + 1}$$

Esta es la ecuación de Verhulst para el crecimiento en peso de un individuo.

Si de acuerdo a esta ecuación ploteamos w contra edad (t), vemos que esta es simétrica.



Ecuación de la curva de crecimiento de Gompertz .-

Esta ecuación fue utilizada entre ótros, por Weymouth y Mc.Millan (1931). Se ha empleado para describir el crecimiento de moluscos, crustáceos y peces, pero sus parámetros no tienen interpretación biológica.

La **expresión** diferencial de la que parte Gompertz es la siguie<u>n</u> te:

$$\ln \left[\frac{1}{1} \frac{dl}{dt} \right] = k - ct$$

donde:

k = constante

c = constante

l = longitud

t = tiempo

$$\frac{1}{l} \frac{dl}{dt} = e^{k-ct}$$

El crecimiento en longitud es una expresión experimental en función del tiempo.

$$\frac{dl}{l} = e^{k-ct} dt$$

Integrando:

$$\int \frac{d1}{1} = \int e^{k} e^{-ct} dt$$

$$\int_{1}^{\underline{dl}} = e^{k} \int_{e^{-ct}} dt$$

$$lnl = e^{k} \left(-\frac{e^{-ct}}{c} \right) + c$$

$$lnl = -e^{k} e^{-ct} + C$$

$$\begin{array}{ccc}
 & & -ct \\
1 & = e^{-\frac{e}{G}} & e \\
\end{array}$$

$$1 = e^{c} e^{c}$$

$$1 = e^{c} \left[e^{-c} \right]^{t}$$

Si
$$e^c = B$$

$$-\underline{e}^{K}$$

$$e^{C} = g$$

$$e^{-c} = p$$

La ecuación 43 deviene:

$$1 = Bg^{pt}$$
 (44)

Ecuación de la curva de crecimiento de Von Bertalanffy (1938) .-

A semejanza de la de Verhulst, parte del principio fisiológico que el crecimiento es el resultado de procesos anabólicos y catabólicos añadiendo que los procesos anabólicos son proporcionales a las su perficies absorbentes y los procesos catabólicos son proporcionales a la masa del organismo, representando por tanto, un porcentaje de decremento constante de la masa del individuo.

La ecuación diferencial de la que parte Bertalanffy es:

$$\frac{dw}{dt} = HS - Rw \dots (45)$$

donde:

H = Coeficiente de procesos anabólicos

R = Coeficiente de procesos catabólicos

S = Area total de las superficies absorbentes

w = Peso del individuo

Para integrar la ecuación debemos expresar S y w en términos de longitud del individuo. Von Bertalanffy acepta que este crecimien to es isométrico y ademas, el organismo presenta una densidad constante. Por lo tanto:

 $S = pl^2$ (la superficie S es proporcional a l^2)

 $w = gl^3$ (el peso w es proporcional a l^3). (45a)

donde p y g son constantes de proporcionalidad.

Y expresando <u>dw</u> de (45) en términos de la tasa instantánea del dt crecimiento en longitud, <u>dl</u>, se tendrá:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d(gl^3)}{dt} = 3gl^2 \frac{dl}{dt}$$

sustituyendo estos valores en (45)

$$3gl^2 \frac{dl}{dt} = H pl^2 - R gl^3$$

dividiendo ambos miembros por $3gl^2$

$$\frac{d1}{dt} = \frac{H \, pl^2}{3 \, gl^2} - \frac{R \, gl^3}{3 \, gl^2}$$

$$\frac{d1}{dt} = \frac{Hp}{3g} - \frac{R1}{3}$$

Si llamamos a
$$\frac{Hp}{3g}$$
 = E(constante) (45b)

$$y = \frac{R}{3} = K \text{ (constante)} \dots (4.5c)$$

$$\frac{dl}{dt} = E - Kl$$

$$\frac{dl}{E - k!} = dt$$

Integrando entre to y t correspondientes a lo y lt, respectivamente:

$$\int_{1_{o}}^{1} \frac{dl}{E-k!} = \int_{t_{o}}^{t} dt$$

$$\left[-\frac{1}{k} \ln (E-kl)\right]_{l_{o}}^{1} - \left[t\right]_{t_{o}}^{t}$$

$$\left[-\frac{1}{k} \ln (E-kl_{t})\right] - \left[-\frac{1}{k} \ln (E-kl_{o})\right] = t - t_{o}$$

$$\frac{1}{k} \ln (E-kl_{o}) - \frac{1}{k} \ln (E-kl_{t}) = t - t_{o}$$

Factorizando 1/k

$$\frac{1}{k} \left[\ln (E - kl_0) - \ln (E - kl_t) \right] = t - t_0$$
pasando k al 2º miembro

$$\ln \left[\frac{(E - kl_0)}{(E - kl_t)} \right] = k (t - t_0)$$

$$\frac{E - kl_o}{E - kl_t} = e^{k (t - t_o)}$$

$$E - kl_t = (E - kl_0) e^{-k} (t - t_0)$$

$$kl_t = -(E - kl_0) e^{-k(t - t_0)} + E$$

ordenando

$$kl_{t} = E - (E - kl_{o}) e^{-k (t - t_{o})}$$
 $l_{t} = \frac{E}{k} - (\frac{E}{k} - l_{o}) e^{-k (t - t_{o})}$ (46)

Esta es la ecuación de crecimiento de Von Bertalanffy, que aún puede tomar otra forma más práctica. En efecto, examinando (46) se puede ver que a a medida que t $\longrightarrow \infty$, $l_t \longrightarrow E$ que es su valor máximo que lo representamos con L_∞ , y, en conse cuencia, la ecuación (46) toma la siguiente forma:

$$l_{t} = L_{\infty} - (L_{\infty} - l_{0}) e^{-k (t - t_{0})}$$

$$1_{t} = L_{\infty} - \left(L_{\infty} e^{-k(t - t_{0})} - 1_{0} e^{-k(t - t_{0})}\right)$$

y pudiendo establecer que cuando t = 0, l = 0.

obtendremos

$$1_{t} = L_{\infty} - (L_{\infty} - e^{-k(t-t_{o})})$$

finalmente, factorizando L_{∞} $l_{t} = L_{\infty} (1 - e^{-k} (t - t_{0})) \qquad (47)$

que es la forma más habitual de la ecuación de crecimiento de Von Bertalanffy.

Recordando de (45b) y (45c)

$$\frac{E}{k} = \frac{\frac{PH}{3g}}{\frac{R}{3}} = \frac{L}{2}$$

$$L_{\infty} = \frac{p}{g} \times \frac{H}{R}$$

es decir, que L_{∞} es directamente proporcional al coeficiente ana bólico H e inversamente proporcional al coeficiente catabólico R, y, por lo tanto, la máxima talla que puede alcanzar una especie será tanto mayor, cuanto mayor sea H respecto de R.

En la ecuación de Von Bertalanffy, t_o es un valor arbitrario en el sentido de que no tiene significado biológico real. En efecto, t_o representa la edad que tendría el pez al nacer si la forma de su crecimiento en el estado embrionario o larval fuera igual al corespondiente al estado adulto.

<u>Determinación de Los Parámetros de Loo</u> K y t_o <u>de la ecuación de Von Bertalanffy.-</u>
Partiendo de (47) es indudable que podremos poner:

$$1_{t + T} - 1_{t} = L_{\infty} \left[1 - e^{-k(t - T - t_{0})} \right] - L_{\infty} \left[1 - e^{-k(t - t_{0})} \right]$$

donde T es un intervalo de tiempo constante, que, por ejemplo, puede ser un año.

$$1_{t+T} - 1_{t} = L_{\infty} - L_{\infty} e^{-k(t-T-t_{0})} - L_{\infty} + L_{\infty} e^{-k(t-t_{0})}$$

$$1_{t+T} - 1_{t} = -L_{\infty} e^{-k(t+T-t_{0})} + L_{\infty} e^{-k(t-t_{0})}$$

$$1_{t+T} - 1_{t} = -L_{\infty} e^{-kt-kT+kt_{0}} + L_{\infty} e^{-k(t-t_{0})}$$

$$1_{t+T} - 1_{t} = -L_{\infty} e^{-kt} e^{-kT} e^{kt_{0}} + L_{\infty} e^{-k(t-t_{0})}$$

$$1_{t+T} - 1_{t} = -L_{\infty} e^{-kt+kt_{0}} e^{-kT} + L_{\infty} e^{-k(t-t_{0})}$$

$$l_{t+T} - l_{t} = L_{\infty} e^{-k(t-t_{0})} (-e^{-kT}) + L_{\infty} e^{-k(t-t_{0})}$$

$$l_{t+T} - l_{t} = L_{\infty} e^{-k} (t - t_{0}) (1 - e^{-kT}) \dots (48)$$

Por otra parte es evidente que:

$$L_{\infty} \sim L_{t} = L_{\infty} - L_{\infty} \left[1 - e^{-k(t - t_{0})} \right]$$

$$L \infty - l_t = L_\infty - L_\infty + L_\infty e^{-k} (t - t_0)$$

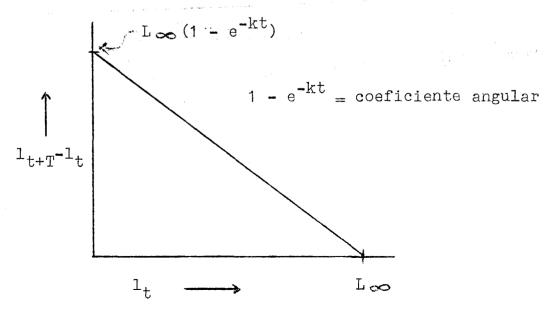
$$L_{\infty} - l_{t} = L_{\infty} e^{-k (t - t_{0})}$$

Reemplazando en la ecuación (48).

$$l_{t + T} - l_{t} = (L_{\infty} - l_{t})$$
 (1 - e^{-kT})

siendo evidente que la (49) corresponde a una línea recta, como se desprende de las equivalencias dadas debajo de ella.

Por lo tanto la gráfica de la ecuación (49) será:



Ejercicio Nº 4.-

Kitahama (1955) da los siguientes datos de edad-tamaño para el arenque del Pacífico (Clupea pallasii C y V) capturados frente a la costa de Hokkaido durante 1910-54. Las longitudes son promedios de un período de 45 años; las edades fueron determinadas de lecturas de otolitos.

Edad (años)	Long. total em.	1 _{t+T} - 1 _t
34567890112345	25.70 28.40 30.15 31.65 31.85 33.44 34.97 35.03 35.03 37.70	2.70 1.75 1.50 1.20 0.80 0.79 0.53 0.59 0.47 - 0.10 1.11 0.66

$$W = 7.8 \times 10^{-3} L^3 gr.$$

Determinación de L $_{\infty}$, K y t $_{o}$

	Y _i	X _i	X _i Y _i	x_{i}^{2}
	1 _{t + T} - 1 _t	1 _t	$\begin{pmatrix} (1_{(t + T)} - 1_t) 1_t$	(1 _t) ²
	2.70 1.75 1.50 1.20 0.80 0.79 0.53 0.59 0.47 - 0.10 1.11 0.66	25.70 28.40 30.15 31.65 31.65 33.64 34.97 36.93 37.04	69.3900 49.7000 45.2250 37.9800 26.2800 26.5835 18.2532 20.6323 16.7132 - 3.6030 39.8823 24.4464	660.4900 806.5600 909.0225 1001.7225 1079.1225 1132.3225 1186.1136 1222.9009 1264.5136 1298.1609 1290.9649 1371.9616
\sum_{i}	12.00	396.37	371.4829	13223.8559

Sabemos, por estadística, que la línea de regresión de Y sobre X, calculada según el método de los mínimos mínimos cuadrados obodece a la siguiente fórmula.

$$\frac{\sum x_{i}Y_{i} - \frac{\sum x_{i}\sum Y_{i}}{n}}{\sum x_{i}^{2} - \frac{(\sum x_{i})^{2}}{n}} (x - \overline{x}) \dots (50)$$

$$n = 12$$

$$\overline{y} = 1.00$$

$$\overline{X} = 33.03$$

$$(\sum \mathbf{x})^2 = 157,109.1769$$

Luego en el presente caso:

$$Y = 1.00 + \frac{371.48 - 396.37}{13,223.86 - 13,092.43}$$
 (x - 33.03)

$$Y = 1.00 + \frac{-28.49}{131.43}$$
 (X - 33.03)

$$Y = 1.00 + (-0.189378) (X - 33.03)$$

$$Y = 1.00 - 0.189378 X + 6.2552$$

$$Y = 7.2552 - L_{\odot} (1-e^{-k_t}) - L_{\odot}$$

Este ejemplo se muestra en el Figuga 5a.

Si 1 -
$$e^{-k}$$
 = 0.189378
 e^{-k} = 1.000000 - 0.189378
 e^{-k} = 0.810625
 k = 0.2099

Para hallar el valor de t_0 , reemplazamos en la ecuación (47) los valores tomados de los datos originales, por ejemplo t=5 y $l_{\pm}=30.15$.

$$30.15 = 38.312 (1 - e^{-0.2099} (5 - t_0))$$

 $30.15 = 38.312 - 38.312 e^{-1.0495} e^{0.2099t_0}$

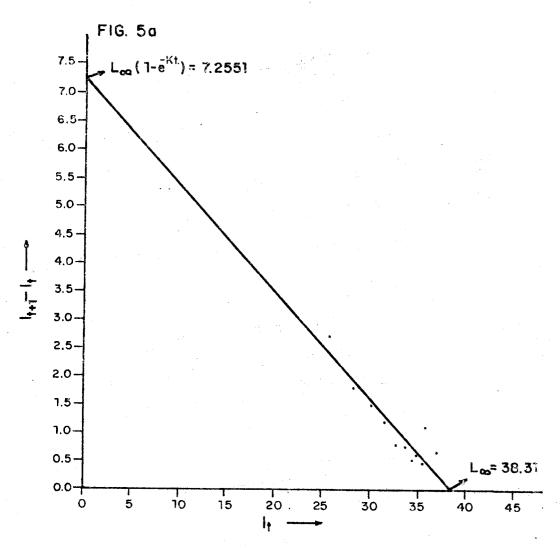
$$30.15 = 38.312 - 38.312 (0.3499) e^{0.2099t}$$

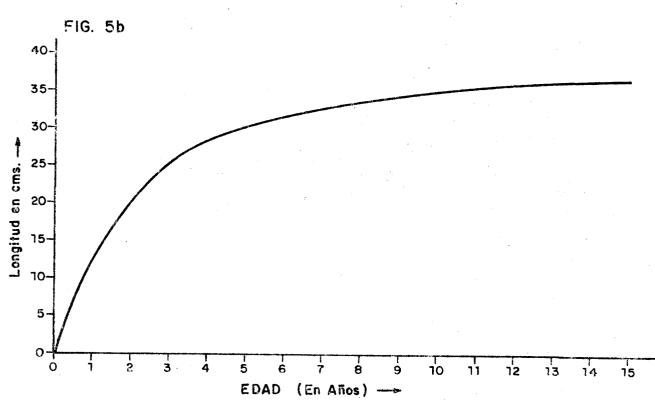
$$30.15 = 38.312 - 13.4054 e^{0.2099t}$$

$$13.4054 e^{0.2099t} = 8.1862$$

$$e^{0.2099t}$$
o = $\frac{8.162}{13.1+051+}$ = 0.608859

$$0.2099t_0 = ln 0.608859$$





$$t_0 = \frac{-0.49594}{0.2099} = -2.3627$$

Conociendo Loc = 38.31, $k = 0.2099 \text{ y t}_0 = -2.3627$

podemos reemplazarlos en la ecuación de Von Bertalanffy y de terminar los valores teóricos de \mathbf{l}_{t} , para las diferentes t.

Por ejemplo si t = 10

$$l_{10} = 38.312 \left[1 - e^{-0.2099} (10 + 2.3627) \right]$$

 $l_{10} = 35.44$ cm.

que concuerda satisfactoriamente con el de 34.97 cm. de los datos originales. Procediendo en esta forma obtenemos los valores teóricos de l_t correspondiente a cada una de las \underline{e} dades, como se muestra en la Figura 5b.

Determinación de las constantes B, g y p de la ecuación de Gompertz.-

Ante todo debe decirse que la ecuación de Gompertz es válida sólo cuando

B > 0

0 < g < 1

0 < p < 1

tomando logaritmos a la ecuación (44)

$$log 1 = log B + p^{t} log g (51)$$

Hagamos:

$$log l = \hat{Y}$$

log B = H

log g = J

Entonces la ecuación (51) se puede escribir

$$\hat{Y} = H + J_p^{\dagger} \dots (52)$$

usando esta expresión (52) reiteradamente, podemos escribir para diferentes valores de t:

$$\hat{Y}_{o} = H + J_{p}^{to} \dots (53)$$

$$\hat{Y}_{1} = H + J_{p}^{t_{1}} \dots (5+)$$

$$Y_2 = H + J_p^{t2}$$
 (55)

Si los incrementos de tiempo son iguales, esto es:

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = h$$

entónces las ecuaciones (53), (54) y (55) se convierten en:

$$\hat{Y}_{o} = H + J_{p}^{t_{o}} \dots$$
 (56)

$$\widehat{Y}_1 = H + J_p^{t_0} + h \qquad (57)$$

$$\hat{Y}_2 = H + Jp^{t_0} + 2h$$
 (58)

podemos eliminar h, restando (56) de (57) y (57) de (58):

$$\hat{Y}_1 - \hat{Y}_0 = Jp^{t_0} + h - Jp^{t_0} = Jp^{t_0} (p^h - 1) \dots (59)$$

$$\hat{Y}_2 - \hat{Y}_1 = Jp^{t_0} + 2h - Jp^{t_0} + h = Jp^{t_0} + h (p^h - 1) \dots (60)$$

Dividiendo la ecuación (60) entre la (59):

$$\frac{\widehat{Y}_2 - \widehat{Y}_1}{\widehat{Y}_1 - \widehat{Y}_0} = \frac{p^{t_0 + h}}{p^{t_0}} = p^h \dots (61)$$

tomando logaritmos:

$$\frac{\log \cdot \widehat{Y}_2 - \widehat{Y}_1}{\widehat{Y}_1 - \widehat{Y}_0} = h \log p \dots (62)$$

log.
$$p = \frac{1}{h} \log \frac{\widehat{Y}_2 - \widehat{Y}_1}{\widehat{Y}_1 - \widehat{Y}_0}$$

p = antilog. (log. p)

sustituyendo p en cualesquiera de las ecuaciones (59) ó (60), digamos en la (59) y despejemos J:

$$J = \frac{\widehat{Y}_1 - \widehat{Y}_0}{p^{t_0} (p^h - 1)}$$

pero $J = \log g$

Conociendo ahora p y J, podemos sustituir sus valores en cuales quiera de las ecuaciones (56), (57) ó (58), por ejemplo, usando en la ecuación (56), y luego despejamos H:

$$H = \hat{Y}_{o} - Jp^{to}$$

pero H = log B

$$.$$
, $B = antilog H$

y así hemos determinado las tres constantes B, g y p de la ecu<u>a</u> ción de Gompertz:

$$L = Bg^{t}$$

Ejercicio 5.
Computar la ecuación de crecimiento de Gompertz para los siguientes datos.-

t (Edad en años)	l (longitud en cms.)	Media aritmé- tica de l	
1	0.14, 0.15, 0.20, 0.17, 0.21, 0.18, 0.16	0.17	
2	14.5, 11.7, 13.0, 13.5, 15.0, 14.0, 14.5, 18.3, 15.0, 15.0, 15.0, 15.5, 16.0, 15.0, 17.0, 16.5, 15.5	15.0	
3	59.0, 53.0, 55.0, 54.5, 54.0, 55.5, 56.0, 58.0, 57.0, 59.0, 56.5, 57.6	56.3	
) _†	81.0, 82.0, 83.0, 84.0, 85.0, 83.5, 82.8, 86.0, 87.0, 85.2, 84.5, 83.7, 84.0, 84.3, 84.0	8½•O	
5	91.0, 92.0, 93.0, 94.0, 95.0, 92. 96.0, 93.4, 97.0, 94.6, 95.5	5, 9 ¹ +•0	
6	96.0, 97.0, 98.9, 97.5, 98.0, 98.5, 100.0, 99.0, 97.1, 96.4, 98.0, 98.0, 99.6	98.0	
7	96.0, 97.0, 98.0, 99.0, 96.3, 98.3, 100.0, 101.0, 99.4, 102.0, 101.7	98.9	
8	103.0, 96.0, 99.0, 99.5, 100.0	99.5	

Trabajando sólamente con:

t	1	$\log 1 = \Upsilon$
2	1 5	$\log 1_0 = 1.1761 = 1_0$
4	84.0	$\log 1_1 = 1.9243 = \hat{Y}_1$
6	98.0	$\log l_2 = 1.9912 = \hat{Y}_2$

Sustituyendo en las ecuaciones (56), (57) y (58)

1.1761 = H +
$$Jp^2$$
 (1)
1.9243 = H + Jp^{2+2} (2)
1.9912 = H + Jp^{2+2X2} (3)

Efectuando las sustracciones correspondientes para eliminar H:

$$1.9243 - 1.1761 = Jp^{2+2} - Jp^{2} = Jp^{2} (p^{2} - 1)$$

1.9912 - 1.9243 =
$$Jp^{2+2x^2} - Jp^{2+2} = Jp^{2+2} (p^2 - 1)$$

ó

$$0.7^{1}+82 = Jp^{2} (p^{2} - 1)$$
 (1)

$$0.0669 = Jp^{2+2} (p^{2} - 1)$$
 (2)

dividiendo la ecuación (2) entre la (1) del grupo II

$$0.0669 = \frac{\sqrt{p^2 + 2} (p^2 - 1)}{\sqrt{p^2 (p^2 - 1)}}$$

$$0.089 = p^2$$
 $p = 0.2983$

Sustituyendo el valor de p en la ecuación (1) de II

$$0.7482 = J 0.2983^2 (0.089 - 1)$$

$$J = \frac{0.7482}{-0.081079} = -9.2278$$

pero $J = \log g$

$$g = antilog (-9.2278)$$

$$g = antilog (\overline{10.7722})$$

Sustituyendo los valores g y J en cualquiera de las ecuaciones de I, tomemos, por ejemplo, la primera:

$$1.1761 = H + (-9.2278) \times 0.089$$

$$1.1761 = H - 0.821274$$

$$H = 1.1761 + 0.8213$$

$$H = 1.9974$$

pero

$$H = log B$$

...
$$B = antilog (1.9974)$$

$$B = 99.4$$

y ahora, que conocemos los valores de B, g, p los ponemos en la ecuación de Gompertz y obtenemos:

$$1 = 99.4 (5.918 \times 10^{-10})^{0.2983}^{t} \dots (63)$$

Con el objeto de ver el grado de concordancia entre los valores de longitud computados con esta ecuación (63) con los de los da tos originales hallemos los valores de la las edades 6 años y 5 años.

Preparando la (63) y aplicándola para t = 6 años, tendremos: $l_6 = \text{antilog} || 1.9974 + {\text{antilog} [6 (-0.5253)]} (-9.2287) ||$ $= \text{antilog} || 1.9974 + {\text{antilog} (-3.1518)} (-9.2278) ||$ $= \text{antilog} {1.9974 + (\text{antilog} 4.8482) (-9.2278)}$ $= \text{antilog} {1.9974 + 0.000705 (-9.2278)}$ = antilog (1.9974 - 0.006506) = antilog 1.99098 $1_6 = 97.95$ cm., siendo 98 cm. el velor de los datos originales. Cuendo t = 5 años

 $L_5 = 94.5$ cm., siendo 94 cm. el valor en los datos originales.

Transformación de la ecuación del crecimiento en longitud en la ecuación del crecimiento en peso.-

Comenzaremos con la ocuación (47) de Von Bertalanffy que dice: $1_{t} = L_{\infty} \Big[i - e^{-k} (t - to) \Big]$

Sabemos de la scuación (45a) que $W = gl^3$ (el peso es proporcional al cubo de su longitud); por lo tanto, elevando al cubo la ecuación (47) y luego multiplicándola por g la habremos transformado en una ecuación que dé el peso en función de la edad y de la longitud:

$$W_{t} = gl_{t}^{3} = g L^{3} \left[1 - e^{-k(t - t_{0})}\right]^{3}$$

en la que, desde luego, g Lo no viene a ser más que el peso má ximo que lo representaremos con We :

$$W_{t} = W_{o} \left[i - e^{-k} \left(t - t_{o} \right) \right]^{3}$$

$$W_{t} = W_{\infty} \left[(1 - 3e^{-k} (t - t_{0}) + 3e^{-2k} (t - t_{0}) - e^{-3k} (t - t_{0}) \right]$$

$$W_{t} = W_{\infty} - W_{\infty} 3e^{-k} (t - t_{0}) + W_{\infty} 3e^{-2k} (t - t_{0}) - W_{\infty} e^{-3k(t - t_{0})}$$
o sea:

$$W_{t} = W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \Omega_{n} e^{-nk(t-t_{0})}$$
(63)

Cuando

$$n = 0$$
 corresponde $\Omega_0 = 1$

$$n = 1$$
 corresponde $\Omega_{1} = -3$

$$n = 2$$
 corresponde $\Omega_{2} = 3$

$$n = 3$$
 corresponde $\Omega_{3} = -1$

Determinación de la ecuación de rendimiento on peso (Yw).-

La ecuación (63) es, pues, la forma de la de Bertalanffy que facilitará la integración de la tasa de rendimiento en peso que en una lección anterior vimos que era:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{Y_{t}}{t} \right) = F N_{t} W_{t} \dots (6^{l_{+}})$$

además sabemos que:

$$N_{t} = R' e^{-(F + M)} (t - t_{p}')$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (64) tendremos:

$$\frac{d (Y_w)}{dt} = FR' W_{\infty} e^{-(F + M)} (t - t_{p'}) \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n e^{-nk} (t - t_0)$$

$$\frac{d (Y_{w})}{dt} = FR' W_{\infty} e^{-(F+M)t} + (F+M)t_{p}, \quad \sum_{n=0}^{3} \Omega_{n} e^{-nkt} + nkto$$

$$\frac{d (Y_{w})}{dt} = FR' W_{\infty} e^{(F+M)t_{p}}, \quad \sum_{n=0}^{3} \Omega_{n} e^{nkto} e^{-nkt} e^{-(F+M)t}$$

$$\frac{d (Y_{w})}{dt} = FR' W_{\infty} e^{(F+M)t_{p}}, \quad \sum_{n=0}^{3} \Omega_{n} e^{nkto} e^{-nkt} - (F+M) t$$

$$\frac{d (Y_{w})}{dt} = FR' W_{\infty} e^{(F+M)t_{p}}, \quad \sum_{n=0}^{3} \Omega_{n} e^{nkto} e^{-(nkt-(F+M))t}$$

$$\frac{d (Y_{w})}{dt} = FR' W_{\infty} e^{(F+M)t_{p}}, \quad \sum_{n=0}^{3} \Omega_{n} e^{nkto} e^{-(F+M+nk)t}$$

$$\frac{d (Y_{w})}{dt} = FR' W_{\infty} e^{(F+M)t_{p}}, \quad \sum_{n=0}^{3} \Omega_{n} e^{nkto} e^{-(F+M+nk)t}$$

Ahora se procede a integrar entre t_p, y t_{\(\lambda\)} para obtener el rendimiento en peso <u>de una clase anual durante el tiempo que pasa ta pesquería</u>

por la pesquería.

$$\int_{\mathbf{d}} (\mathbf{Y}_{\mathbf{w}}) = \mathbf{FR}! \quad \mathbf{W}_{\mathbf{w}} = (\mathbf{F} + \mathbf{M}) \mathbf{t}_{\mathbf{p}}! \sum_{\mathbf{n} = \mathbf{0}}^{\mathbf{3}} \mathbf{\Omega}_{\mathbf{n}} e^{\mathbf{n} \mathbf{k} \mathbf{t} \mathbf{0}} \qquad \int_{\mathbf{t}_{\mathbf{p}}!}^{\mathbf{t}_{\mathbf{0}}} e^{-(\mathbf{F} + \mathbf{M} + \mathbf{n} \mathbf{k}) \mathbf{t}} d\mathbf{t}$$

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{w}} = \mathbf{FR}! \quad \mathbf{W}_{\mathbf{w}} = (\mathbf{F} + \mathbf{M}) \mathbf{t}_{\mathbf{p}}! \sum_{\mathbf{n} = \mathbf{0}}^{\mathbf{3}} \mathbf{\Omega}_{\mathbf{n}} e^{\mathbf{n} \mathbf{k} \mathbf{t} \mathbf{0}} \left[\frac{-e^{-(\mathbf{F} + \mathbf{M} + \mathbf{n} \mathbf{k}) \mathbf{t}}}{\mathbf{F} + \mathbf{M} + \mathbf{n} \mathbf{k}} \right] \mathbf{t}_{\mathbf{p}}!$$

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{w}} = \mathbf{FR}! \quad \mathbf{W}_{\mathbf{w}} = (\mathbf{F} + \mathbf{M}) \mathbf{t}_{\mathbf{p}}! \sum_{\mathbf{n} = \mathbf{0}}^{\mathbf{3}} \mathbf{\Omega}_{\mathbf{n}} e^{\mathbf{n} \mathbf{k} \mathbf{t} \mathbf{0}} \left[\frac{-e^{-(\mathbf{F} + \mathbf{M} + \mathbf{n} \mathbf{k}) \mathbf{t}}}{\mathbf{F} + \mathbf{M} + \mathbf{n} \mathbf{k}} \right] \mathbf{t}_{\mathbf{p}}!$$

$$\mathbf{Y}_{\mathbf{w}} = \mathbf{FR}! \quad \mathbf{W}_{\mathbf{w}} = (\mathbf{F} + \mathbf{M}) \mathbf{t}_{\mathbf{p}}! \sum_{\mathbf{n} = \mathbf{0}}^{\mathbf{3}} \mathbf{\Omega}_{\mathbf{n}} e^{\mathbf{n} \mathbf{k} \mathbf{t} \mathbf{0}} e^{-(\mathbf{F} + \mathbf{M} + \mathbf{n} \mathbf{k}) \mathbf{t}_{\mathbf{p}}!} \mathbf{t}_{\mathbf{p}}! = e^{-(\mathbf{F} + \mathbf{M} + \mathbf{n} \mathbf{k}) \mathbf{t}_{\mathbf{p}}} \mathbf{t}_{\mathbf{p}}! \mathbf{t}_{\mathbf$$

$$Y_{W} = FR' \ W_{\infty} e^{(F+M)t_{p}} \sum_{n=0}^{3} \underbrace{\bigcap_{F+M+nk} e^{nkt_{o}}}_{F+M+nk} \left[e^{-(F+M+nk)t_{p}} \right]_{-e^{-(F+M+nk)t_{h}}}$$

$$Y_{W} = FR' \ W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \underbrace{\bigcap_{F+M+nk} e^{nkt_{o}}}_{F+M+nk} \left[e^{-(F+M+nk)t_{p}} \right]_{e^{-(F+M)t_{p}}} e^{-(F+M+nk)t_{h}}$$

$$Y_{W} = FR' \ W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \underbrace{\bigcap_{F+M+nk} e^{nkt_{o}}}_{F+M+nk} \left[e^{-(F+M)t_{p}} \right]_{e^{-nkt_{p}}} e^{(F+M)t_{p}} e^{-(F+M)t_{h}}$$

$$Y_{W} = FR' \ W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \underbrace{\bigcap_{F+M+nk} e^{nkt_{o}}}_{F+M+nk} \left[e^{-nkt_{p}} \right]_{e^{-(F+M)}} e^{-(F+M)} e^{-nkt_{h}}$$

$$Y_{W} = FR' \ W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \underbrace{\bigcap_{F+M+nk} e^{nkt_{o}}}_{F+M+nk} \left[e^{-nkt_{p}} \right]_{e^{-(F+M)}} e^{-(F+M)} e^{-nkt_{h}}$$

$$Y_{W} = FR' \ W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \underbrace{\bigcap_{F+M+nk} e^{nkt_{o}}}_{F+M+nk} \left[e^{-nkt_{p}} \right]_{e^{-(F+M)}} e^{-(F+M)} e^{-nkt_{h}}$$

$$Y_{W} = FR' \ W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \underbrace{\bigcap_{F+M+nk} e^{nkt_{o}}}_{F+M+nk} \left[e^{-nkt_{p}} \right]_{e^{-(F+M)}} e^{-nkt_{p}}$$

$$Y_{W} = FR' \ W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \underbrace{\bigcap_{F+M+nk} e^{nkt_{o}}}_{F+M+nk} \left[e^{-nkt_{p}} \right]_{e^{-(F+M)}} e^{-nkt_{p}}$$

$$Y_{W} = FR' \ W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \underbrace{\bigcap_{F+M+nk} e^{nkt_{o}}}_{F+M+nk} \left[e^{-nkt_{p}} \right]_{e^{-(F+M)}} e^{-nkt_{p}}$$

$$Y_{W} = FR' \ W_{\infty} \sum_{F+M+nk} e^{nkt_{o}} \left[e^{-nkt_{p}} \right]_{e^{-(F+M)}} e^{-nkt_{p}}$$

$$Y_{W} = FR' \ W_{\infty} \sum_{F+M+nk} e^{nkt_{o}} \left[e^{-nkt_{p}} \right]_{e^{-(F+M)}} e^{-nkt_{p}}$$

$$Y_{W} = FR' \ W_{\infty} \sum_{F+M+nk} e^{nkt_{o}} \left[e^{-nkt_{p}} \right]_{e^{-(F+M)}} e^{-(F+M)}$$

$$Y_{W} = FR' \ W_{\infty} \sum_{F+M+nk} e^{nkt_{o}} \left[e^{-nkt_{p}} \right]_{e^{-(F+M)}} e^{-(F+M)}$$

$$Y_{W} = FR' \ W_{\infty} \sum_{F+M+nk} e^{nkt_{o}} \left[e^{-nkt_{p}} \right]_{e^{-(F+M)}} e^{-(F+M)}$$

$$Y_{W} = FR' \ W_{\infty} \sum_{F+M+nk} e^{nkt_{o}} \left[e^{-nkt_{p}} \right]_{e^{-(F+M)}} e^{-(F+M)}$$

$$Y_{W} = FR' \ W_{\infty} \sum_{F+M+nk} e^{nkt_{o}} \left[e^{-nkt_{p}} \right]_{e^{-(F+M)}} e^{-(F+M)}$$

$$Y_{W} = FR' \ W_{\infty} \sum_{F+M+nk} e^{nkt_{o}} \left[e^{-nkt_{p}} \right]_{e^{-(F+M)}} e^{-(F+M)}$$

$$Y_{W} = FR' \ W_{\infty} \sum_{F+M+nk} e^{nkt_{o}} e^{nkt_{o}} e^{-(F+M)} e^{-(F+M)$$

Pasando e ^{-nkt}p , al numerador

$$Y_{W} = FR' \quad W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \Omega_{n} e^{nkt \circ} - e^{-nkt} p' \left[1 - e^{-(F+M)} \left(t_{\lambda} - t_{p'} \right) e^{-nkt} \right] e^{nkt} p'$$
Factorizando nk $F + M + nk$

$$Y_{W} = FR' \quad W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n}}{F + M + nk} e^{nkt \circ} - nkt p' \left[1 - e^{-(F+M)} \left(t_{\lambda} - t_{p'} \right) - nk \left(t_{\lambda} - t_{p'} \right) \right] e^{-nkt} p'$$
Factorizando $(t_{\lambda} - t_{p'})$

$$Y_{W} = FR' \quad W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n}}{F + M + nk} e^{nkt \circ} - nkt p' \left[1 - e^{-(F+M+nk)} (t_{\lambda} - t_{p'}) \right] e^{-nkt} p'$$

$$Y_{W} = FR' \quad W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n}}{F + M + nk} e^{-nk(t_{p'} - t_{o})} \left[1 - e^{-(F+M+nk)} (t_{\lambda} - t_{p'}) \right] e^{-nkt} p'$$

$$Y_{W} = FR' \quad W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n}}{F + M + nk} e^{-nk(t_{p'} - t_{o})} \left[1 - e^{-(F+M+nk)} (t_{\lambda} - t_{p'}) \right] e^{-nkt} p'$$

$$Y_{W} = FR' \quad W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n}}{F + M + nk} e^{-nk(t_{p'} - t_{o})} \left[1 - e^{-(F+M+nk)} (t_{\lambda} - t_{p'}) \right] e^{-nkt} p'$$

$$Y_{W} = FR' \quad W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n}}{F + M + nk} e^{-nk(t_{p'} - t_{o})} \left[1 - e^{-(F+M+nk)} (t_{\lambda} - t_{p'}) \right] e^{-nkt} p'$$

$$Y_{W} = FR' \quad W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n}}{F + M + nk} e^{-nkt} \left[1 - e^{-(F+M+nk)} (t_{\lambda} - t_{p'}) \right] e^{-nkt} p'$$

$$Y_{W} = FR' \quad W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n}}{F + M + nk} e^{-nkt} \left[1 - e^{-(F+M+nk)} (t_{\lambda} - t_{p'}) \right] e^{-nkt} p'$$

$$Y_{W} = FR' \quad W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n}}{F + M + nk} e^{-nkt} \left[1 - e^{-(F+M+nk)} (t_{\lambda} - t_{p'}) \right] e^{-nkt} p'$$

$$Y_{W} = FR' \quad W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n}}{F + M + nk} e^{-nkt} \left[1 - e^{-(F+M+nk)} (t_{\lambda} - t_{p'}) \right] e^{-nkt} p'$$

$$Y_{W} = FR' \quad W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n}}{F + M + nk} e^{-nkt} \left[1 - e^{-(F+M+nk)} (t_{\lambda} - t_{p'}) \right] e^{-nkt} p'$$

$$Y_{W} = FR' \quad W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n}}{F + M + nk} e^{-nkt} \left[1 - e^{-(F+M+nk)} (t_{\lambda} - t_{p'}) \right] e^{-nkt} p'$$

$$Y_{W} = FR' \quad W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n}}{F + M + nk} e^{-nkt} p'$$

$$Y_{W} = FR' \quad W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n}}{F + M + nk} e^{-nkt} p'$$

$$Y_{W} = FR' \quad W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n}}{F + M + nk} e^{-nkt} p'$$

$$Y_{W} = FR' \quad W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n}}{F + M + nk} e^{-nkt} p'$$

$$Y_{W} = FR' \quad W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n}}{F + M + nk} e^{-nkt} p'$$

$$Y_{W} =$$

Ecuación que dá el rendimiento en peso de una clase anual R' durante todo el tiempo A que pasa en la pesquería, ó, alterna tivamente el rendimiento de un stock en equilibrio, en un año.

Ecuación del rendimiento por recluta. -

Sabemos que R' = R $e^{-M(t_p \cdot - t_p)}$, luego sustituyendo en (65) y pasando R al primer miembro obtenemos:

$$\frac{Y_{w}}{R} = FW_{\infty} e^{-M(t_{p}, -t_{p})} \frac{3}{n=0} \frac{n}{F+M+nk} \left[1-e^{-(F+M+nk)\lambda}\right] \qquad (66)$$

que es la ecuación de rendimiento por cada recluta que ingresó al área de pesca.

Ejercicio Nº 6

Empleando la ecuación (66) calcular para la "Platija" (Pleuronectes platessa).

$$\frac{Y_{\underline{w}}}{R}$$
 y $\frac{Y_{\underline{N}}}{R}$, cuando

$$k = 0.10$$

$$M = 0.10$$

$$W_{\infty} = 3000 \text{ gr}.$$

$$t_{pt} = t_p = 3.7 \text{ años}$$

$$t_0 = 0.8 \text{ años}$$

$$t_{\lambda} = 15 \text{ años}$$

$$\lambda = t_{\lambda} - t_{p!} = 15.0 - 3.7 = 11.3$$
 años

$$t_{p}$$
, - $t_{o} = 4.5$ años

F = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0, 1.25, 1.50,2.00, 🗢

n	nk	nk(t _p ,-t _o)	e-nk(tp1 ·· to)	Ω_n	On e-nk(tp,-to)
\(\text{O} \) 1 \(\text{2} \) 3	0 0.1 0.2 0.3	0 0.45 0.90 1.35	1.000000 0.637628 0.406570 0.259240	+ 1 - 3 + 3 - 1	1.000000 - 1.912884 1.219710 - 0.259240

Segunda Tabla. Para F = 0.05

A-n B-F C-F+M D-F+M:nk	E=(F+M+ F=e-(F+ G=1-e-(F+	M+nk)入		-nk(t _p ,-t	tc) [1-e ^{-(F} o) [1-e ^{-(F}	'+M+nk) '+M+nk);]	77
A B	C D	E	F	F ÷ . G	M + nk H	I	R ^Y N
1 0.05 0	.15 0.25 .15 0.35	2.825	0.059310	0,940690	0.816398 -1.799431 1.196342 -0.257636	-7.1977	

para F = 0.1

para F = 0.2

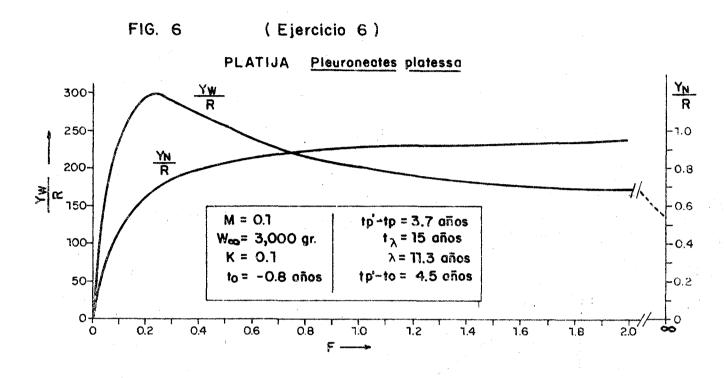
|--|

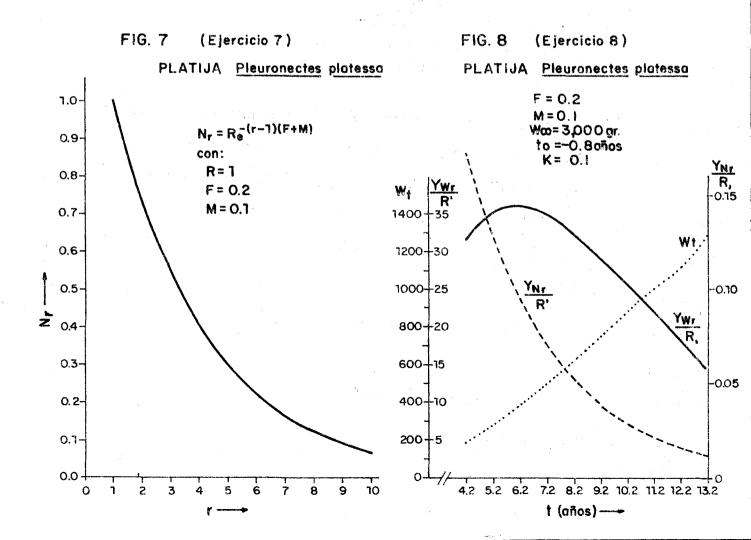
para F = 0.3

0 0.30 0.40 0.40 4.520 1 0.30 0.40 0.50 5.650 2 0.30 0.40 0.60 6.780 3 0.30 0.40 0.70 7.910	0.003518 0.996482	-1.906154 -3 1.218323 2 -0.259145 -0	.47278 .81231 .03054 .37021 .32080
Tercera Tabla. $A = F_{B}$ $B = \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n} e^{-nk(t_{p}, -t_{o})}}{F + M + nk}$		~ ~ <u>~ ~ 11</u>	$\frac{x(t_{p,-t_0})}{M + nk}$
Д В	C	Y _W R	$\frac{\mathtt{Y}_{\mathtt{N}}}{\mathtt{R}}$
0.05 1.088 0.1 0.814 0.2 0.492 0.3 0.321 0.4 0.226 0.5 0.172 0.6 0.132 0.8 0.090 1.0 0.0675 1.25 0.0513 1.50 0.0404 2.0 0.0290	3264.0 2442.0 1476.0 963.0 678.0 516.0 396.0 270.0 202.5 153.9 121.2 87.0	163.2 244.2 295.2 288.9 271.2 258.0 237.8 216.5 202.5 192.4 181.8 174.0 143.4	.2722 .4478 .6444 .7418 .7972 .8333 .8568 .8888 .9091 .9259 .9375

Este ejercicio se muestra en la Figura Nº 6, en que la curva de $\frac{Y_N}{R}$ nos indica que a medida que aumenta F el rendimiento en número por recluta aumenta rápidamente pero luego se mantiene a partir de aproximadamente 0.9 de mortalidad por pesca.

La curva de $\frac{Y}{R}$ indica que el máximo rendimiento en la "Platija" se obtiene con un F de alrededor de 0.2. A bajos niveles de pes ca el rendimiento en peso por recluta es alto debido a que existen peces grandes por la profusión de clases anuales.

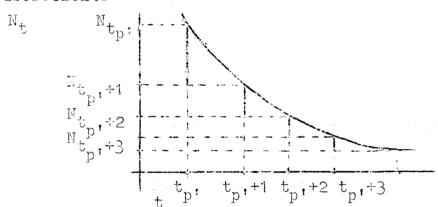




Sabemos por una lección anterior que el número de individuos (N_t) que sobreviven hasta la edad t de una clasa anual R' que entra a la fase de explotación a la edad $t_{p'}$, viene dado por la siguien te ecuación:

$$N_{t} = R! e^{-(F+M)} (t - t_{p}!)$$

Al plotear $N_{\rm t}$ contra t, resultará la siguiente curva experimental decreciente:



donde las líneas verticales de trazo continuo representan los números de individuos que mueren al pasar de un año a otro, y la pendiente ó decrecimiento numérico de $N_{\rm t}$ será tanto mayor cuanto más grande sea F ó M ó ambos a la vez.

Por lo tanto, el número de sobrevivientes al cabo de un año será $\mathbb{N}_1 \ = \ \mathbb{R}^1 \ e^{-\left(\mathbb{F}^+M\right)}$

y el número de los que murieron en ese año será

La tasa bruta de mortalidad será entónces

$$a = \frac{D_t}{N_t} = \frac{R! - R! e^{-(F+M)}}{R!}$$

Factorizando

$$\frac{R! \left(1 - e^{-(F+M)}\right)}{R!} = \underbrace{1 - e^{-(F+M)}}_{\text{tasa bruta de mortalidad total}}$$

Por otra parte, sabemos que el número de individuos pescados a través de todo el tiempo que una clase anual pasa en la fase de explotación es:

$$Y_{N} = \frac{FR!}{F+M} \left[1 - e^{-(F+M)\lambda} \right]$$

El número de individuos de esa clase anual pescados en un solo año se obtendrá poniendo $\lambda = 1$, ésto es:

$$Y_{N_1} = \frac{FR!}{F+M}$$
 (1 - $e^{-(F+M)}$)

y por lo tanto:

Tasa de explotación

$$\frac{Y_{N_1}}{R!} = \frac{F}{F+M} \left[1 - e^{-(F+M)} \right] \qquad (68)$$
Fracción Tasa bruta de de pesca mortalidad to tal

Ecuación que da el rendimiento por recluta, en un año.

La tasa de explotación se usa a menudo en Biología Pesquera, pero tiene las siguientes desventajas:

- 1. Se necesita conocer F y M
- 2. Varía al cambiar M, ésto es aún cuando F permanezca constante.

Acabamos de ver que el número de individuos que sobreviven al cabo del 1er. eño es:

$$N_1 = R^1 e^{-(F+M)}$$

el número de individuos que sobreviven al cabo del 2do. año será:

$$N_2 = R' e^{-2(F+M)}$$

y el número de muertos será: $N_1 - N_2$ o sea:

$$R^{t} e^{-(F+M)} - R^{t} e^{-2(F+M)}$$

Factorizando

y, en consecuencia, el número de muertos por pesca, ésto es el rendimiento en números, durante el segundo año será:

$$Y_{\text{N}_2} = \left(\frac{F}{F+M}\right) R^{\text{t}} e^{-(F+M)} \left[1 - e^{-(F+M)}\right]$$

El número de sobrevivientes al fin del 3er. año será:

$$M_3 = R$$
, e^{-3} (F+M)

El número de muertos en este segundo año será:

$$N_2 - N_3$$
, ó sea

Factorizando

$$R^{2} = -2(F+M) \left[1 - e^{-(F+M)}\right]$$

En consecuencia, el rendimiento en números durante el 3er. año será:

$$Y_{N_3} = \frac{F}{F+M} R! e^{-2(F+M)} \left[1 - e^{-(F+M)} \right]$$

Generalizando

$$Y_{N_r} = \frac{F}{F+M} R! e^{-(F+M)} (r-1) \left[1 - e^{-(F+M)} \right]$$

de donde se desprende que el rendimiento en número, por recluta, en cualquier año r, será:

$$\frac{Y_{N_r}}{R!} = \frac{F}{F+M} e^{-(F+M)} (r-1) \left[1 - e^{-(F+M)}\right] \dots (69)$$

Ejercicio Nº 7

Computar $\frac{Y_N}{R^i}$ usando la ecuación (69) para la "Platija" con:

$$M = 0.1$$

$$F = 0.2$$

 $\lambda = 10$ años

haciendo que ${\bf r}$ varíe desde 1 hasta 10 años, ambos inclusive y suponiendo que ${\bf R}^{{\bf r}}=1$.

F F+M	F F+M	e-(F+M)	1-e ^{-•(F+}	M) (1)	r	(r-1) (F+M)	N+ e-(r-1)(r+n)	YN. R'
0.2 0.3 0.2 0.3 0.2 0.3 0.2 0.3 0.2 0.3 0.2 0.3 0.2 0.3	0.667 0.667 0.667 0.667 0.667 0.667	0.7408 0.7408 0.7408 0.7408 0.7408 0.7408 0.7408	0.2592 0.2592 0.2592 0.2592 0.2592 0.2592 0.2592 0.2592 0.2592	0.1729 0.1729 0.1729 0.1729 0.1729 0.1729 0.1729 0.1729 0.1729	3456789	0.36 0.92 1.55 1.82.1 2.4	1.0000 0.7408 0.5488 0.4066 0.3012 0.2231 0.1653 0.1225 0.0907 0.0672	0.1729 0.1281 0.0949 0.0703 0.0521 0.0386 0.0286 0.0212 0.0157 0.0116 0.6340

La gráfica de este ejercicio se muestra en la Figura 7.

Conversión de los valores
$$Y_{N_r}$$
 en sus correspondientes Y_{W_r}

Para esto debemos multiplicar cada valor $\underline{Y_N}_r$ por el peso del indi $\underline{R_i}$

viduo en el año r respectivo, esto es:

$$\frac{Y_{N_{\underline{r}}}}{R!} \times W_{\underline{r}} = \frac{Y_{W}}{R!} \dots (70)$$

Habiendo establecido anteriormente que el peso de un individuo a la edad t en años viene dado por:

$$W_{t} = W_{0} \left[1 - e^{-K(t-t_{0})} \right]^{3}$$

El problema sería determinar qué valor numérico deberemos darle a t puesto que el peso de un individuo va cambiando a través del año.

Lo más expeditivo será tomar como valores de t las semi-sumas de dos edades consecutivas a partir de $t_{\rm p}$. Es decir:

1er valor de t =
$$\frac{t_{p^i} + (t_{p^i} + 1)}{2}$$
 = $\frac{3.7 + 4.7}{2}$ = 5.2

2do valor de t =
$$\frac{(t_{p^1} + 1) + (t_{p^1} + 2)}{2} = \frac{4.7 + 5.7}{2} = 6.2$$

3er valor de t =
$$\frac{(t_p, +2) + (t_p, +3)}{2} = \frac{5.7 + 6.7}{2} = 7.2$$

10° valor de t =
$$\frac{(t_p, +9) + (t_p, +10)}{2}$$
 = $\frac{12.7 + 13.7}{2}$ = 13.2

Empleando entónces la ecuación (70) y sustituyendo en élla W_r por W_{∞} , $\left[1-e^{-K(t-t_0)}\right]$ tendremos:

$$\frac{Y_{W_{\underline{r}}}}{R^{!}} = \frac{Y_{N_{\underline{r}}}}{R^{!}} \quad \text{We } \left[1 - e^{-K(t - t_{0})}\right]^{3}$$

y como
$$\frac{Y_{N_R}}{R!} = \frac{F e^{-(r-1) (F+M)}}{F+M} \left[1 - e^{-(F+M)}\right]$$

tenemos finalmente:

$$\frac{Y_{W_{\mathbf{r}}}}{R!} = \frac{F e^{-(\mathbf{r} - 1) (F + M)}}{F + M} \left[1 - e^{-(F+M)} \right] W_{\infty} \left[1 - e^{-K(\mathbf{t} - t_0)} \right]^{3} \dots (71)$$

Ejercicio 8.-

Empleando la ecuación (71) computar Y_W para los siguientes $\frac{\mathbf{r}}{R!}$

valores:

$$W_{o} = 3,000 \text{ gs.}$$
 $K = 0.1$
 $t_{p} = 3.7 \text{ años}$
 $t_{o} = -0.8 \text{ años}$

Para esto hagamos la siguiente tabla de valores:

						<u>(e)</u>	`,	
+	t-to	K(t-to)	-K(t-ta)	-K(+-6)	[1-e (+-to)]	A EN TO	χ _ν ,	Yw.
10.2 11.2 12.2	6.0 7.0 8.0	0.6 0.7 0.8 0.9 1.1 1.2 1.3	0.6065 0.5488 0.4966 0.4493 0.4066 0.3679 0.3329 0.3012 0.2725 0.2466	0.3935 0.4512 0.5034 0.5507 0.5934 0.6321 0.6671 0.6988 0.7275	0.09186 0.12756 0.16702 0.20893 0.25252 0.29685 0.34122 0.38499	275.7 382.8 501.0 627.0 757.8	0.1729 0.1281 0.0949 0.0703 0.0521 0.0386 0.0286 0.0212 0.0157 0.0116	31.59 35.32 36.32 35.22 32.67 29.25 25.47 21.70 18.13 14.88

La gráfica de este ejercicio se muestra en la Figura 8 en que la curva $Y_{W_{\overline{R}}}$ indica que a la edad de 6.2 años se alcanza el máximo

rendimiento en peso. La curva de $\frac{Y_{N}}{r}$ indica que el rendimiento

expresado en número de individuos por recluta va disminuyendo a medida que aumenta la edad de los reclutas R.

Ejercicio 9 .-

Computar
$$\frac{Y_N}{R!}$$
 y $\frac{Y_W}{R!}$ para la "platija", con F = 1.0 $t_0 = -0.8$ años $M = 0.1$ $K = 0.1$

 $W_{\infty} = 3000 \text{ gr.}$ $\lambda = 10 \text{ años}$

A	В	С	D	E	F	G	Н	I	J	K
1.0 1.0 1.0 1.0 1.0	1.1 1.1 1.1 1.1 1.1	0.909 0.909 0.909 0.909 0.909 0.909	0.332871 0.332871 0.332871 0.332871 0.332871 0.332871 0.332871	0.667129 0.667129 0.667129 0.667129 0.667129 0.667129 0.667129 0.667129	0.6064 0.6064 0.6064 0.6064 0.6064 0.6064	1234567890	4 5 6 7 8	1.1 2.3 4.4 5.5	1.00000 0.33282 0.11080 0.03698 0.01228 0.00409 0.00136 0.00045 0.00015	0.6064 0.2019 0.0672 0.0224 0.0074 0.0025 0.0008 0.0003 0.0001

$$A = F$$

$$B = F+M$$

$$C = \frac{F}{F+M}$$

$$D = e^{-(F+M)}$$

$$E = 1-e^{-(F+M)}$$

$$F = \frac{F}{F+M} \left[1-e^{-(F+M)}\right]$$

$$H = r-1$$

$$I = (r-1) (F+M)$$

$$J = N_r = e^{-(r-1)} (F+M)$$

$$K = Y_N = \frac{Y_N}{R^T}$$

$$G = r$$

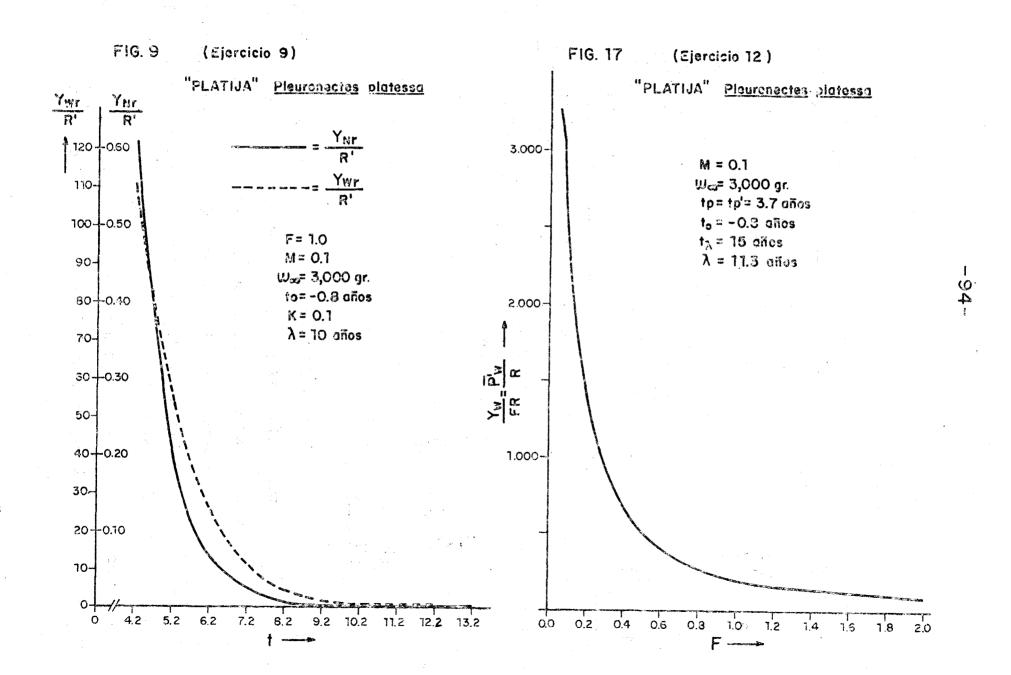
			The state of the s							
t	t-to	K(+to)	e (+-to)	-K(t-6)	[i-e ^{KHoto})]	de date	Y25/R	Ywr		
4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12.	7 8 9 10 11 12 12 13	0.7 0.8 0.9 1.0 1.1 1.2	0.5488 0.4966 0.4493 0.4066 0.3679 0.3329	0.3935 0.4512 0.5034 0.5507 0.5934 0.6671 0.66988 0.7275 0.7534	0.0609 0.0919 0.1276 0.1670 0.2526 0.2969 0.3412 0.3850 0.4276	182.7 275.6 382.7 501.1 626.8 757.6 890.6 1023.7 1154.9	0.6064 0.2019 0.0672 0.0224 0.0074 0.0025 0.0008 0.0003 0.0001 0	110.79 55.64 25.72 11.22 4.64 1.89 0.71 0.31 0.12 0		

La gráfica de este ejercicio se muestra en la Figura 9. La curva de Y_W pone de manifiesto que a este valor tan grande de F se cap $\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}^T}$

tura gran cantidad de peces pequeños lo que hace que el incremento en peso debido al crecimiento no llegue a compensar el decremento en peso causado por la alta mortalidad por pesca.

Si multiplicamos $\frac{Y_N}{R!}$ y $\frac{Y_W}{R!}$ de los ejercicios anteriores por $R! = \frac{Y_N}{R!}$

10000 se obtiene:



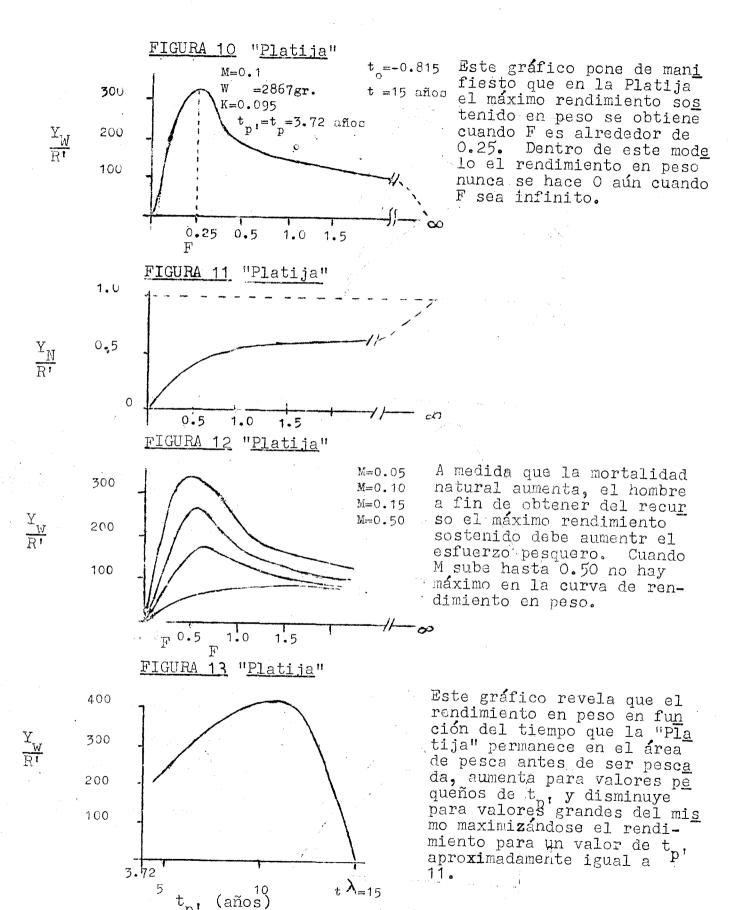
	F = 0.2		F = 1.0	
r ,	$\frac{Y_{N}}{R^{t}} \times R$	Y _W r x R'	$\frac{Y_{N_{\underline{r}}}}{R!} \times R!$	YWr x R'
1234567890 10	1729 1281 949 703 521 386 286 212 157 116	315900 353000 363200 352300 326500 292400 254700 217000 181300 148800	6065 2019 669 223 75 25 8 3 1	1108000 556000 256000 112000 47000 19000 7000 3000 1000
- www.cayloin.com	6340 ir	ndividuos 2'805,200 gr.	9088 indi:	riduos 2'109,000 gr

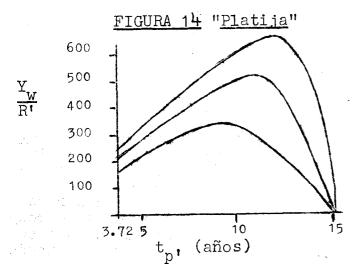
Si el stock está en equilibrio dinámico y $t_p = t_p$, como es el caso en la "platija" del Mar del Norte:

$$\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}^{\mathbf{r}}} = \frac{\mathbf{Y}_{\mathbf{N}}}{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{Y}_{\mathbf{N}}}{\mathbf{R}}$$

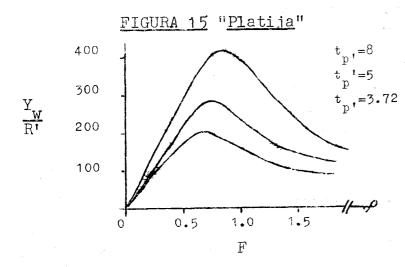
$$\frac{\sum_{\mathbf{r}=1}^{\lambda} Y_{\mathbf{W}_{\mathbf{r}}}}{R!} = \frac{Y_{\mathbf{W}}}{R}$$

Esto quiere decir que el rendimiento de una clase anual a través de su paso por la pesquería será igual al rendimiento del stock en un año cualquiera si el stock se encuentra en equilibrio dinámico. El examen de las ecuaciones YN/R' y YW/R' revela que los rendimientos son función de varios parámetros, y las posibles combinaciones de los valores numéricos concretos de de estos son literalmente numerosos. Las Figuras del 10 al 16 muestran algunos casos concretos, utilizando los datos que se tienen para la "platija" del Mar del Norte.

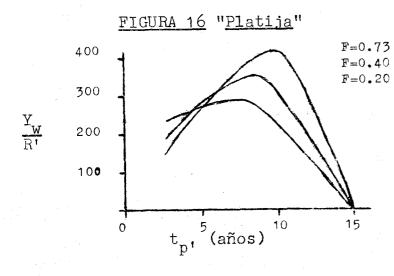




Del examen de este gráfico se desprende que para alcanzar el máximo rendimiento sostenido, el valor de t_p, debe ser tanto menor cuanto mayor sea el de M.



Estas carvas muestran que a medida que t_p, aumenta debe también aumentarse F, si se quiere obtener el máximo rendimiento. De otro lado, el gráfico también revela que cuanto mayor es t_p, mayor será el rendimiento.



Este gráfico muestra que para cada intensidad de pesca hay un valor de t, que maximiza el rendimiento y que, además, cuanto mayor es la intensidad de pesca tanto mayor ha de ser también t, para obtener el máximo rendimiento sostenible.

Tablas de Rendimiento de Beverton y Holt.-

Conocemos la ecuación del rendimiento en peso que dice: $Y_{W} = R F W_{cc} e^{-M(t_{p}'-t_{p})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln e^{-k(t_{p}'-t_{o})} - t_{o})}{F+M+nk} \left(1-e^{-(F+M+nk)}\right) (72)$ Ahora bien, Bevertón y Holt modificaron esta ecuación original que presenta separados los parámetros de mortalidad por pesca, mortalidad natural, crecimiento, edad de reclutamiento y edad al entrar en la fase de explotación y, en consecuencia, para incluir todas las combi

naciones de valores que se encontrarían en la práctica, sería necesario un número de combinaciones demasiado grande, lo que no permitiría

formar tablas de fácil utilización. Jones (1957) ha demostrado que la ecuación puede expresarse en forma de función beta incompleta;

Wilimovsky y Wicklund (1963) han publicado tablas adecuadas de dicha

función. Tanaka (1958) derivó una expresión para lo que él llama

"función de mortalidad" (Do), que es el peso total de los peces que mueren anualmente, igual a la suma del rendimiento y el peso de los

peces que sucumbieron por muerte natural. Ha calculado valores de

esta función y de éllos puede deducirse el rendimiento por recluta.

Por lo demás, debiera ser obvio que la validez de la Tablas de Rendimiento dependerá de la medida en que la pesquería de que se trate sa tisfaga los supuestos básicos de la ecuación y del grado de exactitud con que puedan estimarse los valores numéricos de los parámetros.

La transformación que Beverton y Holt hicieron de la ecuación (72) se da a continuación:

Comienzan por hacer $\lambda = \infty$

por lo tanto (72) deviene:

$$Y_{W} = R F W_{\odot} e^{-M(t_{p}, -t_{p})} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n} e^{-nk(t_{p}, -t_{o})}}{F + M + nk} \left[1 - e^{-(F+M-nk)^{\odot}}\right]$$

$$Y_{W} = R F W_{\odot} e^{-M(t_{p}, -t_{p})} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n} e^{-nk(t_{p}, -t_{o})}}{F + M + nk} \left[1 - \frac{1}{e^{(F+M+nk)^{\odot}}}\right]$$

$$Y_{W} = R F W_{\odot} e^{-M(t_{p}, -t_{p})} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n} e^{-nk(t_{p}, -t_{o})}}{F + M + nk} \left[1 - \frac{1}{e^{(F+M+nk)^{\odot}}}\right]$$

$$Y_{W} = R F W_{\odot} e^{-M(t_{p}, -t_{p})} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n} e^{-nk(t_{p}, -t_{o})}}{F + M + nk} \left[1 - \frac{1}{e^{(F+M+nk)^{\odot}}}\right]$$

$$Y_{W} = R F W_{\odot} e^{-M(t_{p}, -t_{p})} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n} e^{-nk(t_{p}, -t_{o})}}{F + M + nk} \left[1 - \frac{1}{e^{(F+M+nk)^{\odot}}}\right]$$

$$Y_{W} = R F W_{\odot} e^{-M(t_{p}, -t_{p})} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n} e^{-nk(t_{p}, -t_{o})}}{F + M + nk} \left[1 - \frac{1}{e^{(F+M+nk)^{\odot}}}\right]$$

$$Y_{W} = R F W_{\odot} e^{-M(t_{p}, -t_{p})} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n} e^{-nk(t_{p}, -t_{o})}}{F + M + nk} \left[1 - \frac{1}{e^{(F+M+nk)^{\odot}}}\right]$$

$$Y_{W} = R F W_{\odot} e^{-M(t_{p}, -t_{p})} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n} e^{-nk(t_{p}, -t_{o})}}{F + M + nk} \left[1 - \frac{1}{e^{(F+M+nk)^{\odot}}}\right]$$

$$Y_{W} = R F W_{\odot} e^{-M(t_{p}, -t_{p})} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n} e^{-nk(t_{p}, -t_{o})}}{F + M + nk} \left[1 - \frac{1}{e^{(F+M+nk)^{\odot}}}\right]$$

y cambiando la simbología del modo siguiente

$$Y_{W} = Y$$

$$t_p = t_r$$

$$\Omega_n = Un$$

La ecuación (73) se escribiría

$$Y = F \underset{\infty}{V} R e^{-M(t_c - t_r)} \sum_{n=0}^{3} \underbrace{Un e^{-nk(t_c - t_o)}}_{F + M + nk}$$
 (74)

que es la ecuación (1) de la que parten Beverton-Holt (ver pag 1 de Manual de Métodos para la evaluación de los stocks de Peces.

Parte II.- Tablas de Funciones de Rendimiento. FAO, Roma, 1966).

trabajando con R e^{-M(t}c^{-t}r), lo podemos escribir como R e $M(t_r-t_o)$ - M (t_c-t_o) (75)

Esta transformación se justifica puesto que en efecto:

$$M(t_r-t_o) - M(t_c-t_o) = Mtr-Mto - Mto+Mto = M(t_r-t_c) = -M(t_c-t_r)$$

Por otro lado conocemos la ecuación de crecimiento de Von Bertalanffy que dice:

$$l_{t} = L_{\infty} (1 - e^{-k(t-t_{0})})$$

$$\frac{1_{t}}{L_{\alpha}} = 1 - e^{-k(t - t_0)}$$

$$\frac{1}{L_o} = -1 = -e^{-k(t-t_o)}$$

Cambiando de signo a toda la ecuación

$$1 - \frac{1}{L_{xx}} = e^{-k(t-t_0)}$$
 (76)

Regresando a la ecuación (75) la podemos escribir así: $R e^{M(t_r-t_o)} e^{-M(t_c-t_o)}$

pero es evidente que

$$e^{-M(t_c-t_o)} = \left[e^{-k(t_c-t_o)}\right]^{M/k} \qquad (77)$$

Vemos que [e-k(tc-to)] tiene estructura equivalente al segundo

miembro de (76)

$$e^{-k(t_c-t_o)} = 1 - \frac{l_c}{l_{t_o}}$$
, luego podemos poner por simetría

Reemplazando en (77)

$$R e^{M(t_r - t_o)} e^{-M(t_c - t_o)} = R e^{M(t_r - t_o)} \left[1 - \frac{1}{L_o}\right]^{M/k} \dots (78)$$
pongamos $c = \frac{1}{L}$

La ecuación (78) se puede escribir:

$$R e^{M(t_r-t_o)} e^{-M(t_c-t_o)} = R e^{M(t_r-t_o)} \left[1 - c\right]^{M/k} \dots (78a)$$

y regresando a la ecuación (74) podremos, entónces, escribirla:

$$Y = F W_{o} R e^{M(t_r - t_o)} (1-c)^{M/k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Un e^{-nk(t_c - t_o)}}{F + M + nk} \cdots (79)$$

Si ponemos $R e^{M(t_r-t_o)} = Ro la (79 deviene)$

$$Y = FW_{\infty} \text{ Ro } (1-c)^{M/k} \sum_{n=0}^{3} \frac{\text{Un } e^{-nk(t_c-t_o)}}{F + M + nk}$$

$$Y = W_0$$
 Ro $(1-c)^{M/k}$ F $\sum_{n=0}^{3} \frac{U_n e^{-nk(t_c - t_0)}}{F + M + nk}$ (80)

Si ponemos
$$E = \frac{F}{F+M}$$

entónces:

$$F = \frac{EM}{1 - E} \dots (81)$$

У

$$M = \underline{F} - F \dots (82)$$

trabajando por un momento sólo con F $\sum_{n=0}^{3} \frac{de}{F+M+nk}$ de (80) podre mos sustituir en élla los valores de F y M dados en (81) y (82), respectivamente, y obtendremos:

$$F = \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{F+M+nk} = \frac{EM}{1-E} \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{F+F-F+nk}$$

$$F = \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{F+M+nk} = \frac{EM}{1-E} \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{\frac{EM}{1-E} + nk}$$

$$F \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{F+M+nk} = \frac{EM}{1-E} \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{\frac{M}{1-E}} + nk$$

$$F \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{F+M+nk} = EM \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{\frac{M}{1-E}} + nk \cdot \frac{1}{1-E}$$

$$F \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{F+M+nk} = EM \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{\frac{M}{1-E}} + nk \cdot \frac{ME}{1-E} - E \cdot nk$$

$$F \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{F+M+nk} = E \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{\frac{M}{1-E}} + nk \cdot \frac{ME}{1-E} - E \cdot nk$$

$$F \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{F+M+nk} = E \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{\frac{M}{1-E}} + \frac{nk}{M} \cdot \frac{ME}{M(1-E)} \cdot \frac{nkE}{M}$$

$$F \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{F+M+nk} = E \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{\frac{1-E}{1-E}} + \frac{nk}{M} \cdot \frac{nkE}{M}$$

$$F \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{F+M+nk} = E \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{\frac{1-E}{1-E}} + \frac{nk}{M} \cdot \frac{nkE}{M}$$

$$F \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{F+M+nk} = E \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{\frac{1-E}{1-E}} + \frac{nk}{M} \cdot \frac{nkE}{M}$$

$$F \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{F+M+nk} = E \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{\frac{1-E}{1-E}} + \frac{nk}{M} \cdot \frac{nkE}{M}$$

Podremos reemplazar en la ecuación (80):

$$Y = W_{\infty} R_{o} (1-c)^{M/k} E \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Un e^{-nk(t_{c}-t_{o})}}{1 + \frac{nk}{M} (1-E)} \dots (83)$$

Del examen de la ecuación (78a) se desprende que:

$$e^{-M(t_c-t_o)} = (1-c)^{M/k}$$

elevemos ambos miembros a nk

$$\begin{bmatrix} e^{-M(t_c-t_o)} \end{bmatrix}^{\frac{nk}{M}} = \begin{bmatrix} (1-e)^{M/k} \end{bmatrix}^{\frac{nk}{M}}$$

$$e^{-\frac{nkM}{M}(t_c-t_o)} = 1-e^{-\frac{nkM}{M}(t_c-t_o)} = (1-e)^{n}$$

reemplazando este valor en (83)

$$Y = W_{on} R_{o} (1-c)^{M/k} E \sum_{n=0}^{3} \frac{Un (1-c)^{n}}{1+nk} (1-E)$$

$$\frac{Y}{M} = (1-c)^{M/k} E \sum_{n=0}^{3} \frac{Un (1-c)^{n}}{M}$$

$$\frac{Y}{W_{\infty}} = (1-c)^{M/k}$$
 $E \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n (1-c)^n}{1 + \frac{nk}{M} (1-E)}$

finalmente si ponemos

$$\frac{Y}{W_{\infty}R_{o}} = \frac{Y!}{N}$$

obtendremos:

$$Y' = E (1 - e)^{M/k} \sum_{n=0}^{3} \frac{Un (1-e)^n}{1 + \frac{nk}{M} (1-E)}$$
 (84)

y ésta es exactamente la ecuación (12) que dan Beverton-Holt en la pag. 3 de su publicación citada.

Para trabajar con las Tablas de Rendimiento de Beverton y Holt se requiere conocer $\frac{M}{L}$, E y C, sabiendo que:

$$E = \frac{F}{F+M}$$

$$c = \frac{1}{L_{\infty}} = \left[\frac{W_{\text{p!}}}{W_{\text{old}}} \right]^{1/3}$$

Ejercicio 10.-

Hallar Y' según la ecuación (84) cuando:

$$E = 0.2$$

$$c = 0.1$$

$$\frac{M}{k} = 1$$

$$Y' = 0.9 \times 0.2 \left(\frac{1}{1+1} \frac{(0.9)^{\circ}}{(0.8)} \right) + \left(-\frac{3}{1+1} \frac{(0.9)^{1}}{(0.8)} \right) + \left(\frac{3}{1+2} \frac{(0.9)^{2}}{(0.8)} \right) + \left(-\frac{1}{1+3} \frac{(0.9)^{3}}{(0.8)} \right)$$

$$Y' = 0.18 \left[\frac{1}{1.8} - \frac{2.7}{1.8} + \frac{2.43}{2.6} - \frac{0.729}{3.4} \right]$$

$$Y' = 0.18 \left[1.00 - 1.50 + 0.9346 - 0.2144 \right]$$

$$Y' = 0.18 \times 0.2202$$

$$Y' = 0.039636$$

Ejercicio 11.-

Computar $\frac{Y_{\mathbf{W}}}{R}$ cuando

$$F = 0.2$$

$$M = 0.1$$

$$V_{\infty} = 3000 \text{ gr}.$$

$$t_{p'} = t_{p} = 3.7$$
 años

$$t_0 = -0.8$$

$$\lambda = 11.3$$
 años

$$k = 0.1$$

Sabemos que:

$$\frac{Y_{\underline{W}}}{P} = F W_{\underline{w}} e^{-M(t_{p_1}-t_p)} \sum_{n=0}^{3} \frac{\Omega_{n_e-nk(t_{p_1}-t_o)}}{F+M+nk} \left[1 - e^{-(F+M+nk)\lambda}\right]... (85)$$

Si en esta ecuación ponemos los valores numéricos dados obtenemos:

$$\frac{\mathbf{Y}_{\mathbf{W}}}{\mathbf{R}} = 0.2 \times 3000 \left[\frac{1}{0.3} \left(1 - e^{-3.39} \right) - \frac{3 e^{-0.45} (1 - e^{-4.52})}{0.4} + \frac{3 e^{-0.90} (1 - e^{-5.65})}{0.5} \right]$$

$$\frac{Y_W}{R}$$
 = 600 (3.220970 - 4.730136 + 2.430839 - 0.431586)

$$\frac{Y_W}{R}$$
 = 294.0 gr/recluta

$$Wp' = 3,000 (1 - e^{-0.1(4.5)})^3$$

$$Wp' = 3,000 ((1 - 0.6376)^3)$$

$$Wp' = 3,000 \times 0.0474379$$

$$Wp^1 = 143 gr.$$

$$c = \left(\frac{Wp!}{W_{oo}}\right)^{1/3}$$

$$c = \left(\frac{1+3}{3000}\right)^{1/3} = 0.047^{1/3}$$

$$c = 1/3 \log 0.047$$

$$c = 1/3(\overline{2}.6721)$$

$$c = 1/3 (-1.3279)$$

$$c = -0.4426$$

$$c = \overline{1} \cdot 5574$$

$$c = 0.3609$$

Ahora bien, en las Tablas de Rendimiento de Beverton y Holt con:

$$\frac{M}{3c} = 1.0$$

E = 0.6667

c = 0.3609

Se obtiene $Y^t = 0.071854$.

Para convertir Y' en rendimiento en peso por recluta, con $\lambda = \infty$ debemos multiplicar Y' por $\frac{W_{o}}{\sqrt{1 - (\frac{W_{p!}}{W_{oo}})}} \frac{1}{3} \frac{1}{3} \frac{M/k}{\delta}$ por $\frac{M(t_p - t_o)}{\sqrt{1 - (t_p - t_o)}}$, esto es:

$$|Y_{\overline{W}}| = Y^{\dagger} \frac{W_{\infty}}{\sqrt{1-(W_{\overline{W}})^{1/3}}} = Y^{\dagger} W_{\infty} e^{M(t_{\overline{p}}-t_{\overline{o}})} \dots (86)$$

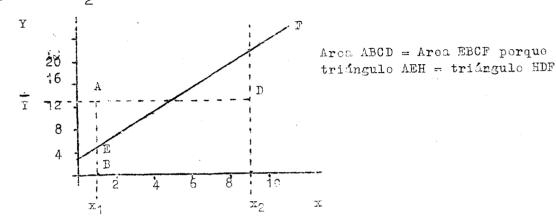
Y_W = 337 gr/recluta

 $|Y_W| = 337$ gr/recluta es mayor que $Y_W = 294$ gr/recluta, y la razón de esta diferencia estriba en que al calcular Y_W el factor $|Y_W| = 1$ de la ecuación (85) no desaparece, y puesto que dicho factor siempre es menor que la unidad se comprende que

$$\frac{\mathbf{v}_{W}}{R} < \left| \frac{\mathbf{v}_{W}}{R} \right|_{\lambda = \infty}$$

La población media en un período determinado

Sea, por ejemplo, la ecuación Y=3+2x,y deseamos conocer \overline{Y} entre los puntos $x_1 = 1$ y $x_2 = 9$



Aplicando el teorema sobre el valor medio de una función, se tiene:

licando el teorema sobre el valor
$$\frac{\overline{Y}}{x, x_2} = \frac{\int_{x_2}^{x_2} y dx}{\int_{x_1}^{x_2} dx}$$
(87)

$$\overline{y} = \int_{1}^{9} (3+2x) dx$$

$$x_1 = 1 \cdot x_2 = 9$$

$$\int_{1}^{9} dx$$

$$x_{1}=1$$
 $x_{2}=9$ $\frac{[3x+x^{2}]_{1}^{9}}{x_{1}^{9}}$

$$\bar{Y}$$
 = $\frac{(27+81) - (3+1)}{9-1}$

$$\bar{x} = 13$$
 $x_1 = 1 x_2 = 9$

Recordemos que el número de individuos en cualquier momento del año lo representamos por N ø y su valor viene dado por la siguiente ecua

cion:

$$N \not o = R' e^{-(F+M)} \not o \cdot \sum_{p=0}^{\lambda-i} e^{-(F+M)p}$$

por lo tanto la población media en números, durante la fase de explotación la obtendremos aplicando el teorema del valor medio de una función acabado de exponer:

$$\overline{\mathbb{N}} \not o = \overline{\mathbb{P}'}_{\mathbb{N}} = \frac{\int_{\mathbf{o} \mathbb{N}} \not o \, d \, \phi}{\int_{\mathbf{o}}' \, d \, \phi} = \frac{\int_{\mathbf{o} \mathbb{R}'} e^{-(\mathbb{F} + \mathbb{M})} \not o}{\int_{\mathbf{o}}' \, d \, \phi} = \frac{\int_{\mathbf{o} \mathbb{R}'} e^{-(\mathbb{F} + \mathbb{M})} \not o}{\int_{\mathbf{o}}' \, d \, \phi}$$

Poniendo las constantes delante de la integral.

$$\overline{N} \emptyset = \overline{P'}_{N} = R' \sum_{F=0}^{\infty} e^{-(F+M)p} \int_{0}^{r} e^{-(F+M)\phi} d\phi$$

habiendo eliminado el denominador porque
$$\left[\emptyset \right]_{0}^{1} = 1$$
, luego: $\overline{N} \emptyset = \overline{P}_{N}^{1} = R^{1} \sum_{F=0}^{N-1} e^{-(F+M)p} \left(-\frac{1}{F+M} \right) \left(e^{-(F+M)} - 1^{2} \right)$
 $\overline{P}_{N}^{1} = R^{1} \sum_{F=0}^{N-1} e^{-(F+M)p} \left(\frac{1}{F+M} \right) \left[1 - e^{-(F+M)} \right]$

e-(F+M)p es una progresión geométrica y sabemos por álgebra que la suma, S, de una progresión geométrica viene dada por la siguiente expresión:

 $S = a \frac{(1-r^n)}{(1-r)}$, la cual en el caso de nuestro problema, deberá reem plazarse del modo siguiente:

n bor y

resultando entónces que:

$$\overline{P}_{N}^{1} = R^{\intercal} \left[\frac{1 - e^{-(F+M)}}{1 - e^{-(F+M)}} \right] \left(\frac{1}{F+M} \right) \left[1 - e^{-(F+M)} \right]$$

ó simplificando

$$\overline{P}_{N}^{i} = \frac{R^{i}}{F+M} \left[1 - e^{-(F+M)\lambda} \right]$$
 (88) Población media en números durante la fase de explotación.

Per otra parte sabemos que:
$$Y_{N} = \frac{FR^{1}}{F+M} \quad \boxed{1 - e^{-(F+M)\lambda}}$$

Comparando esta ecuación con la ecuación (88) se deduce

$$\tilde{P}_{N} = \frac{\gamma_{N}}{W} \dots \dots (89)$$

Ecuación que establece que ${\sf P}_{
m N}^{i}$ es igual a la cpue en números, y de este modo la pesca por unidad de esfuerzo es un buen indice de la población media anual, a condición de que F sea yerdaderamente pro porcional al esfuerzo de pesca.

Ancra nos proponemos hallar la población media en números durante la fase de pre-explotación; para luego determinar la población media de toda la población.

Dasde luego, en la fase de pre-explotación F = 0

R_i = Número de reclutas que entran al área de pe**sc**a $R_1 e^{-M} = N$ úmero de sobrevivientes al fin del primer año. $R_2 + R_1 e^{-M} = Número de individuos al comienzo del 2°$ 2° Año ($R_2 + R_1 e^{-M}$) $e^{-M} = N$ úmero de individuos en cualquier momento del 2° año. ($R_2 + R_1 e^{-M}$) $e^{-M} = R_2 e^{-M} + R_1 e^{-2M} = N$ úmero de individuos al fin del 2º año. $R_3 + R_2 e^{-M} + R_1 e^{-2M} = N$ úmero de individuos al comienzo del 3er. año. $(R_3 \div R_2 e^{-M} + R_1 e^{-2M}) e^{-M} = N$ úmero de individuos en cualquier momento del 3er. Año 4 $(R_3 + R_2 e^{-M} + R_1 e^{-2M}) e^{-M} = R_3 e^{-M} + R_2 e^{-2M} + R_1 e^{-3M} =$ Número de individuos al fin del 3er. año

y este proceso continuará hasta el momento en que la primera clase anual $\mathbf{R_1}$ devenga pescable.

Si t_p : $-t_p = p$, en el año p la ecuación será:

Año p $\begin{bmatrix} R_1 & e^{-(p-1)M} + R_2 & e^{-(p-2)M} + R_3 & e^{-(p-3)M} + R_p \end{bmatrix} e^{-M} \emptyset = Número de sobrevivientes en cualquier momento del año p (90).$

como $R_1 = R_2 = R_3 = R_p = R$, donde R es una constante que la podemos factorizar en (90) obteniendo:

número de individuos vivos presentes en el stock en la fase de preexplotación en cualquier momento ø del año p ó posterior al año p, siempre y cuando el stock esté en equilibrio dinámico.

Para conocer la magnitud media en número del stock dentro de la fase de pre-explotación pondremos:

$$\overline{P}_{N}^{n} = \begin{cases} \phi = 1 \\ \phi = 0 \end{cases} \quad R e^{-M} \phi \quad \sum_{p=0}^{p-1} e^{-Mp} d \phi$$

$$\begin{cases} \phi = 1 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Poniendo las constantes delante de la integral y suprimiendo el denominador, puesto que es igual a la unidad:

$$\overline{P}_{N}^{"} = R \sum_{P=0}^{S-1} e^{-Mp} \int_{0}^{1} e^{-M} \delta d \delta$$

$$\overline{P}_{N}^{"} = R \sum_{P=0}^{S-1} e^{-Mp} \left[-\frac{e^{-M} \delta}{M} \right]_{0}^{1}$$

$$\overline{P}_{N}^{ii} = R \qquad e^{-Mp} \left[-\frac{e^{-M}}{M} \right] - \left[-\frac{e^{0}}{M} \right]$$

$$\overline{P}_{N}^{ii} = R \qquad e^{-Mp} - \frac{e^{-M}}{M} + \frac{1}{M}$$

$$\overline{P}_{N}^{ii} = -\frac{R}{M} \qquad e^{-Mp} \quad (e^{-M} - 1)$$

$$\overline{P}_{N}^{ii} = \frac{R}{M} \qquad e^{-Mp} \quad (1 - e^{-M}) \quad \dots \quad (92)$$

$$pero \qquad e^{-Mp} \quad es \quad una \quad progresión \quad geométrica, \quad en \quad la \quad cual \quad la \quad razón$$

común es e M y el número de términos p, entonces: $e^{-Mp} = \frac{1 - (e^{-M})^p}{1 - e^{-M}}$

$$\sum_{p=0}^{\infty} e^{-Mp} = \frac{1 - (e^{-M})^p}{1 - e^{-M}}$$

por lo tanto, podremos escribir la ecuación (92) así:

$$\vec{P}_{N}^{"} = \frac{R}{M} \left(\frac{1 - e^{-Mp}}{1 - e^{-M}} \right)$$
 (1 - e^{-M})

ó finalmente:

$$\overline{P}_{N}^{n} = \frac{R}{M}$$
 (1 - e^{-Mp}) (93) Esta ecuación da la

población media en números durante la fase de pre-explotación.

En consecuencia, la población media $\overline{P}_{
m N}$ en las fases de pre-explot \underline{a} ción y de explotación tomadas en conjunto será:

$$\overline{P}_{N} = \overline{P}_{N}^{ii} + \overline{P}_{N}^{i}$$

 δ reemplazando $\overline{P}_{ ext{N}}^{tt}$ Y $\overline{P}_{ ext{N}}^{t}$ por (93) y (88), respectivamente:

$$\overline{P}_{N} = \frac{R}{M}$$
 (1 - e^{-Mp}) + $\frac{R^{t}}{F+M}$ (1-e^{-(F+M)})

Conocemos que:

$$R' = R e^{-M(t_p, -t_p)}$$

sustituyendo
$$\overline{P} = \underline{R} (1 - e^{-Mp}) + \underline{R} e^{-M(t_p, -t_p)}$$
 $\left[1 - e^{-(F+M)\lambda}\right]$

Factorizando R
$$\overline{P}_{N} = R \left[\frac{1}{M} \left(1 - e^{-Mp} \right) + \frac{e^{-M(t_{p'} - t_{p})}}{F + M} \right] \left(1 - e^{-(F+M)\lambda} \right) \right]$$

y como hemos convenido en poner $P = t_p \cdot - t_p$, tendremos finalmente:

$$\overline{P}_{N} = R \left[\frac{1}{M} (1 - e^{-Mp}) + \frac{e^{-Mp}}{F+M} (1 - e^{-(F+M)^{2}}) \dots (94) \right]$$

que es el número medio de individuos en las fases de pre-explotación y explotación tomadas en conjunto.

Naturalmente

$$si t_{p} = t_{p}$$

$$p = 0$$

$$E_{\rm A}$$
 ecuación (94) se convierte en: $E_{\rm N} = \frac{R}{F+M}$ (1 - e^{-(F+M) λ}) (95)

La población media en peso o biomasa media.-

Siguiendo un procedimiento similar al anterior se puede demostrar la población media anual en peso en la fase de explotación, es

$$\overline{P}_{W}^{i} = R^{i} W_{-} \underbrace{\frac{3}{n=0}}_{n=0} \underbrace{\Omega_{n}}_{F+M+nk} e^{-nk} \underbrace{(t_{p^{i}} - t_{o})}_{F+M+nk} \underbrace{[1 - e^{-(F+M+nk)\lambda}]}_{-} \dots (96)$$

y examinando la ecuación que da Y_W se podrá ver que:

$$\overline{P}_{W}^{i} = \underline{Y}_{W}$$

lo cual quiere decir que la biomasa media anual en la fase de explotación es igual a la captura por unidad de esfuerzo. Por otra parte la biomasa media en la fase de pre-explotación es:

$$\overline{P}_{W}^{"} = R W_{\infty} \sum_{n=0}^{3} \Omega_{n} \frac{e^{-nk(t_{p'}-t_{o})}}{M+nk} \left[1 - e^{-(M+nk)p}\right] \dots (97)$$

y por lo tanto la biomasa media anual en las fases de pre-explotación y explotación en conjunto será:

$$\overline{P}_{W} = \overline{P}_{W}^{i} + \overline{P}_{W}^{ii}; \text{ y poniendo sus valores dados en (96) y (97), respectivemente:}$$

$$\overline{P}_{W} = R^{i} W \sum_{n=0}^{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nk(t_{p}^{i} - t_{0}^{i})} \left[1 - e^{-(F+M+nk)\lambda}\right] + RW}{F + M+nk} \sum_{n=0}^{3} \Omega_{n}$$

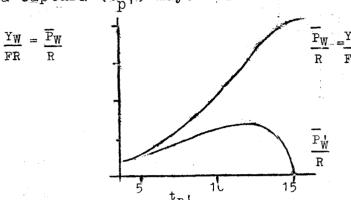
$$\frac{e^{-nk(t_{p}^{i} - t_{p}^{i})}}{M + nk} \left[1 - e^{-(M+nk)p}\right] \dots (98)$$

Examinemos ahora el efecto que tiene sobre la abundancia de la población los cambios en F. En una de las "Tablas" dadas anteriormente consignamos los valores $\underline{Y_W}$; pues bien, si estos valores de $\underline{Y_W}$ los dividimos por los valores de F en esa misma "Tabla" obtendremos $\underline{Y_W}$ ó, lo que es lo mismo $\underline{\overline{P_W}}$, i.e. biomasa anual media por recluta.

F	Y _W R	$\frac{Y_{W}}{FR} = \frac{\overline{P}_{W}^{t}}{R}$
0.05 0.10 0.20 0.30 0.40 0.50 0.60 0.80 1.00 1.25 1.50 2.00	163.2 244.2 295.2 288.9 271.2 257.8 237.8 216.5 192.4 181.8 174.0	3,264.0 2,442.0 1,476.0 963.0 678.0 516.0 396.3 270.6 202.5 153.9 121.2 87.0

Si ploteamos $\frac{Y_W}{FR} = \frac{\overline{P_W^i}}{R}$ contra F obtendremos la curva de la Fig. 17.

En la Figura 18 se puede ver que cuanto mayor es la edad a la prime ra captura (t_n.) mayor es la biomasa media anual por recluta,



 $\frac{\overline{P}_W}{R}$, lo cual se debe, na Republication na que la pes ca no está tomando sino parte del incremento natural del stock.

Enfaticemos más estos conceptos del siguiente modo:

 $\frac{\overline{P_W^i}}{R}$: La biomasa media anual en el período explotable por recluta se incrementa progresivamente hasta aproximadamente 10 años y luego decae rápidamente, y es que el efecto del crecimiento en peso se balancea con la mortalidad hasta un punto en que la mortalidad supera este crecimiento.

 $\frac{\overline{P}_W}{R} = \frac{Y_W}{FR} : \text{ Al aumentar t}_p \text{ , como puede ocurrir al aumentar la luz} \\ \text{ de la malla de las redes, se aumenta la biomasa media} \\ \text{ anual por recluta, \'o sea que a medida que se deja crecer} \\ \text{ al individuo sin pescarlo, se obtiene mayor rendimiento} \\ \text{ por recluta. El stock aumenta m\'as en peso por efecto} \\ \text{ del crecimiento individual; que supera a las disminuciones por mortalidad.} \\$

Estimacione del coeficiente instantáneo de mortalidad total Z.-

El coeficiente instantáneo de mortalidad total Z es igual a la suma de los coeficientes instantáneos de mortalidad por pesca F y por causas naturales.

$$Z = F + M$$

Partiendo de la ecuación diferencial que expresa la forma cómo varía el número de individuos N por el efecto combinado de F y M:

$$\frac{dN}{dt} = - (F + M) N$$

obtendremos

$$\frac{dN}{N} = - (F + M) dt$$

integrando:

$$\begin{bmatrix}
\frac{dN}{N} = - (F + M) & dt \\
\frac{dN}{N} = - (F + M) & t
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
1n & N & t
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & N & t
\end{bmatrix}$$

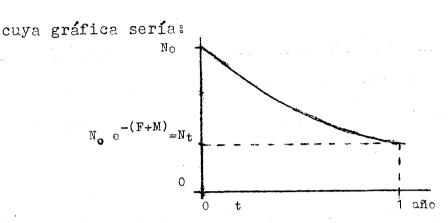
$$ln N_t - ln N_o = - (F + M) (t - t_o)$$

$$\text{Si t}_{0} = 0$$

$$\ln \frac{N_t}{N_0} = - (F + M)t$$

$$\frac{N_{t}}{N_{o}} = e^{-(F+M)t}$$

$$N_{t} = N_{o} e^{-(F+M)t}$$
 (99)



Al aplicar la fórmula (99) debemos tener en cuenta siempre que F y M no son números puros, y sus unidades dependen de las unidades en que se de t.

Ejemplos:

- Si F y M han sido computados con t en años la ecuación (89) se escribirá:

$$N_{(1 \text{ mes})} = N_{0} e^{-\frac{1}{12} (F+M)}$$

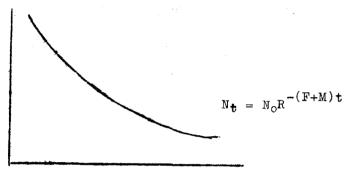
- Si F y M han sido computados con t en meses, la ecuación (89) se escribirá

$$N_{(1 \text{ mes})} = N_{o} e^{-(F+M)}$$

Consideremos ahora el decrecimiento que sufre una clase anual $N_{\rm O}$ a través del tiempo:

orembe.		
AÑO	Número de individuos presentes al comie <u>n</u> zo del año	
; ;		N _o e ^{-(F+M)} N _o e ^{-2(F+M)} N _o e ^{-3(F+M)}
r año	$N_{O} e^{-(r-1)(F+M)} = N_{r-1}$	N _o e-r(F+M)

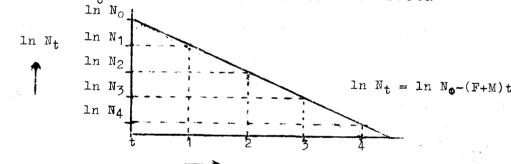
 $^{N}_{o}$, $^{N}_{1}$, $^{N}_{2}$, $^{N}_{3}$, $^{N}_{r}$ es una serie geométrica cuya razón común es e $^{-(F+M)}$, por lo tanto es decrecimiento de $^{N}_{o}$ en función del tiempo es exponencial, cuya gráfica podría ser, por ejemplo, la siguiente:



Tomando in a $N_t = N_o e^{-(F+N)t}$ obtenemos:

 $\ln N_{t} = \ln N_{o} - (F+M)t$

Ploteando ln N_t contra t nos dará una línea recta



Si
$$N_1 = N_0 e^{-(F+M)}$$
 : $\ln N_1 = \ln N_0 - (F+M)$
 $N_2 = N_1 e^{-(F+M)}$: $\ln N_2 = \ln N_1 - (F+M)$
 $N_3 = N_2 e^{-(F+M)}$: $\ln N_3 = \ln N_2 - (F+M)$

Si restamos dos valores consecutivos de las igualdades logarítmicas:

$$\ln N_1 - \ln N_2 = \left[\ln N_0 - (F+M)\right] - \left[\ln N_1 - (F+M)\right] = \ln N_0 - \ln N_1$$

y del mismo modo se puede demostrar que:

$$ln N_2 - ln N_3 = ln N_1 - ln N_2$$

$$ln N_3 - ln N_4 = ln N_2 - ln N_3$$

Esto quiere decir que las diferencias son todas de igual magnitud bajo el supuesto que F y M son constantes.

Hemos establecido en (88) que:

$$\overline{P}_{N}^{\prime} = \frac{R^{\prime}}{F+M} \left[1 - e^{-(F+M)\lambda} \right]$$

que corresponde al número medio de individuos de una clase anual durante un año de un stock en equilibrio dinámico. Consideremos, ahora la ecuación que da el número de individuos de una clase anual en un año determinado, dentro de la fase de explotación, para esto, representamos el número de individuos, N, presentes al comienzo de un año x y pertenecientes a la clase anual 0 de la siguiente manera:

$$\Theta^{N}x$$

Entónces el promedio de individuos durante el año x será:

$$e^{\overline{N}}x = \frac{e^{N}x}{F+M} \left[1 - e^{-(F+M)}\right]$$

Siendo este año x el primero que vamos a considerar, en consecue<u>n</u> cia, el promedio de sobrevivientes al final del año será:

Similarmente:

$$9+1^{\overline{N}}x+1 = \frac{9^{N}x}{F+M} = \frac{1}{1} - e^{-(F+M)}$$

Será el número medio de individuos durante el segundo año y la razón entre $_{e+1}\overline{N}_{x+1}$ y $_{e}\overline{N}_{x}$ es entonces e $^{-(F+M)}$, por lo tanto, se puede usar las razones de los promedios de abundancia de una clase anual de cada dos años consecutivos para obtener las tasas crudas de mortalidad. Si consideramos que los promedios de abundancia de cada clase anual están representados por las frecuencias promediales de esas diferentes clases anuales tal como aparecen en nuestras representativas tomadas del stock a lo largo de un año, nos podremos valer de los valores así hallados para computar los coeficien tes de mortalidad F y M globalmente, es decir Z.

Consideremos el ejemplo siguiente que se refiere a la pesquería de la "platija" del Mar del Norte (<u>Pleuronectes platessa</u>).

Ejercicio 13.-

Computar Z y a, en el ejemplo siguiente que corresponde a la platija del Mar del Norte.

Clase Anual t	Frecuencia ^N t	ln N _t
II III V VI VII VIII IX X	125 1355 2352 1761 786 339 159 70 28	4.82831 7.21286 7.76440 7.47499 6.66696 5.82600 5.06890 4.24850 3.33200

Ahora bien de:
$$N_{t} = N_{o} e^{-(F+M)t}$$

$$\ln N_{t} = \ln N_{o} - (F+M)t$$

$$\ln N_{t} - \ln N_{o} = - (F+M)t$$

$$(F+M) = \frac{\ln N_o - \ln N_t}{t}$$

$$Z = \frac{7.47499 - 3.33200}{5} = 0.830$$

y como ya se demostró que a $= 1 - e^{-(F+M)t}$ pondremos

$$a = 1 - e^{-(0.830)5}$$

$$a = 1 - 0.015764$$

$$a = 0.984236$$

El valor de Z = 0.830 significa la probabilidad de muerte en un instante determinado de cualquiera de los individuos que componen el stock, miéntras que a= 0.984236 es la fracción de individuos que han muerto a lo largo de 5 años, o sea que al cabo de 5 años han muerto 98.4%.

EAL/ppc

BIBLIOGRAFIA

- BARANOV, F. I. On the question of the biological foundations of fisheries. Traducido del ruso al inglés por el Ministerio de Agricultura de Gran Bretaña. 1938.
- (1954)

 Notes on the use of theoretical models in the study of the dynamics of exploited fish populations. Miscellaneous Contributions Number 2, U.S. Fishery Laboratory, Beaufort, North Carolina, U.S.A.
- BEVERTON, R. J. H. y S. J. HOLT Manual of methods for fish stock assessment. Part II Tables of Yield functions FAO, Rome.
- BOEREMA, L. K., G. SAETERSDAL, I. TSUKAYAMA, J. E. VALDIVIA y B. (1965)

 ALEGRE. Report on the effects of fishing on the peruvian stock of anchovy. FAO. Rome.
- BURKENROAD, M. D. Some principles of marine fishery biology. Publications of the Institute of Marine Science, Vol. II Nº 1.
- GRAHAM, M. (Editor) <u>Sea fisheries</u>. <u>Their investigation in the Edward Arnold (publishers)</u> Ltd.
- GULLAND, J. A. <u>Informe sobre la dinámica de la población de anchoveta peruana</u>. Boletín del Instituto del Mar, Perú.
- GULLAND, J. A. Manual of methods for fish stock assessment.

 (1969) Part I. Fish population analysis. FAO, Rome.
- HOLT, S. J. y R. J. H. BEVERTON On the dynamics of exploited fish populations. Her Majesty's Stationery Office, London.
- INTERNATIONAL COMMISSION FOR THE NORTHWEST ATLANTIC FISHERIES.

 (1958)

 Some problems for biological fishery survey and techniques for their solution. A symposium held at Biarrits, France. Halifax, N. S. Canadá.
- JORDAN, R. y A. Ch. de VILDOSO <u>La anchoveta (Engraulis ringens J.)</u>
 (1965)

 Conocimiento actual sobre su biología, ecología

 y pesquería. Informe Nº 6, Instituto del Mar del
 Perú, La Punta, Callao.

- PAULIK, G. J. y D. S. ROBSON <u>Statistical calculations for change-in-ratio estimators of population parameters</u>.

 The Journal of Wildlife Management. Vol 33 N°

 1. U.S.A.
- RICKER, W. Methods of estimating vital statistics of fish populations. Indiana University Publications, Science Series N° 15, Bloomington, Indiana, U.S.A.
- SAETERSDAL, G. Población y explotación. Una reseña de los métodos usados en los estudios de poblaciones de peces explotados. Revista de Ciencias de la Universidad Nacional de San Marcos, Lima, Perú.
- SAETERSDAL, G. y J. E. VALDIVIA Un estudio del crecimiento, tama
 (1964)

 no y reclutamiento de la anchoveta (Engraulis

 ringens J.), basado en datos de longitud.

 Boletín del Instituto de Investigación de los

 Recursos Marinos, Vol. 1, Nº 4, La Punta, Callao

 Perú.
- SCHAEFER, M. B. Fisheries dynamics and the concept of maximum equilibrium catch. Proceedings of the Gulf and Caribbean Fisheries Institute, Miami Beach, U. S. A.
- SCHAEFER, M. B. Some aspects of the dynamics of populations important to the management of the commercial marine fisheries. Bulletin of the Inter-American Tropical Tuna Commission, La Jolla, California.
- SCHAEFER, M. B. Dynamics of the fishery for the anchoveta, Engraulis ringens off Perú. Boletín del Instituto del Mar, Vol. 1, Nº 5, Chucuito, Callao, Perú.
- SCHAEFER, M. B. Investigaciones adicionales de la dinámica de la pesquería de la anchoveta (Engraulis ringens) en el Perú. Informe Nº 31 del Instituto del Mar del Perú, Callao, Perú.
- TSUKAYAMA, K.,I. Una nueva medida de la pesca por unidad de esfuerzo en la pesquería de anchoveta (Engraulis ringens) en el Perú. Boletín del Instituto del Mar
 del Perú, Vol. 2, Nº 4, Callao, Perú.
- WE STENBERG, J.

 (1953)

 Aperqu sur le développemment de la théorie de la peche. Station Zoológique, Den Halcer. Archives Neerlandaises de Zoologie, Tome X, Lvr. 3.

Callao, biciembre do 1970 DIRECCION TECHICA